

روش اجزای محدود برای برآورد انرژی شکست مود ۱ بین لایه ای در ماده مرکب اپوکسی - شیشه تک جهت با استفاده از داده های آزمایشگاهی

محمود موسوی مشهدی

دانشیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

فرهاد جاویدراد

استادیار دانشکده مهندسی هوافضا - دانشگاه هوایی شهید ستاری

(تاریخ دریافت ۷۸/۱/۲۲، تاریخ تصویب ۷۹/۲/۲۴)

چکیده

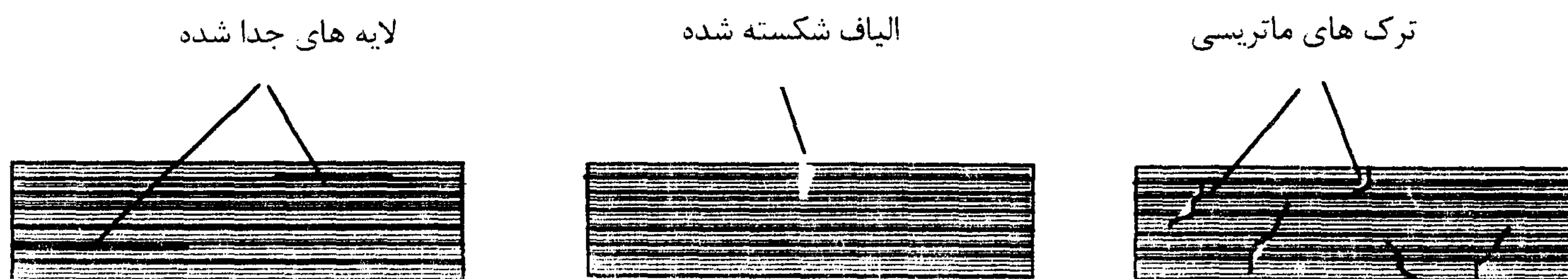
در این مقاله نتایج آزمایش و پردازش اطلاعات برای تعیین انرژی شکست بین لایه ای در مواد مرکب اپوکسی/شیشه تک جهت ارائه شده است. در انجام آزمایشات از نمونه های DCB استفاده شده و کلیه آزمایشات شامل آزمایشات خواص مکانیکی و آزمایشات شکست بر طبق آئین نامه های استاندارد ASTM صورت گرفته است. روش های مختلف پردازش اطلاعات برای تعیین انرژی شکست مود ۱ مورد استفاده قرار گرفته است. مشاهده شده که دقت اندازه گیری ها بخصوص اندازه گیری طول ترک می تواند اثر زیادی در دقت انرژی محاسبه شده داشته باشد. روشی گسترش داده شده است که می تواند بدون استفاده از داده های آزمایشگاهی طول ترک، انرژی شکست را محاسبه نماید. این روش براساس شبیه سازی اجزای محدود رشد ترک در نمونه بوده و از اصول مکانیک شکست به همراه تحلیل میزان رهایی انرژی کرنشی بهره می برد. نشان داده شده است که روش مورد نظر می تواند هم برای تعیین انرژی شکست بطور کاربردی و هم برای محک زدن نتایج آزمایش DCB بکار گرفته شود.

واژه های کلیدی: مواد مرکب، اپوکسی/شیشه، آزمایش شکست بین لایه ای، آزمایشات استاندارد ASTM، نمونه DCB، پردازش اطلاعات، روش اجزای محدود، رشد ترک، انرژی شکست

مقدمه

از این تحقیقات در جهت یافتن روش هایی برای تحلیل دقیق گسیختگی می باشد [۱-۵]. مواد مرکب لایه ای دارای مودهای گسیختگی گوناگون می باشند که از آن جمله می توان جدایش لایه ها، شکست الیاف و ترک های ماتریسی را نام برد (شکل ۱). هر یک از این مودها می توانند به تنهایی یا بصورت ترکیبی با مودهای دیگر ظاهر شوند. بنابراین تحلیل گسیختگی مواد مرکب لایه ای می تواند بسیار پیچیده باشد.

مواد مرکب متشکل از لایه های تقویت شده با الیاف که دارای استحکام و صلابت بالایی می باشند کاربردهای وسیعی در بسیاری از زمینه های مهندسی یافته است. ویژگی و خواص خوب مواد مرکب موجب شده است که امروزه تحقیقات وسیعی جهت گسترش کاربردهای این مواد در سازه های هوافضایی بر اساس طراحی بهینه با حداکثر ایمنی و حداقل وزن در جریان باشد. بخش مهمی



شکل ۱: برخی مود های اصلی گسیختگی مواد مرکب لایه ای.

نوک ترک اولیه بزرگتر باشد احتمال انحراف ترک از سطح اولیه نیز بیشتر خواهد بود.

در مورد تحلیل عددی نتایج آزمایشات DCB نیز مقالات متعددی منتشر گردیده است. عمده کار روی تحلیل و مدل سازی آزمایش بر اساس روش اجزاء محدود صورت گرفته است. به عنوان مثال مرجع [۲۱] نشان داده است که استفاده از المان صفحه ای با قابلیت تغییر شکل برشی دقت و صرفه جویی محاسباتی مناسبی را برای محاسبه میزان رهایی انرژی کرنشی در نمونه DCB تحت مود ۱ به همراه خواهد داشت. ولیکن در حالت مود ترکیبی ۱ و ۲ (باز شدگی و بریدگی) دقت این مدل زیر سوال می باشد. همچنین جدایش مودها را نیز با استفاده از این المان نمی توان بسادگی انجام داد. در مرجع [۲۵] از تحلیل اجزای محدود برای تعیین توزیع انرژی شکست در پروفیل ترک در نمونه DCB استفاده شده و مشاهده گردیده است که پروفیل انرژی شکست در طول ترک یکنواخت نبوده و بسته به زاویه قرارگیری لایه ها قدری حالت سهمی کج شده به خود می گیرد. اثرات لبه های نمونه DCB در آزمایشات نیز که به توسط روش اجزاء محدود مورد بررسی قرار گرفته است در مرجع [۲۶] گزارش شده است. در این مقاله همچنین توصیه هایی جهت کم کردن اثرات لبه ای در نتایج آزمایش آورده شده است. اثرات تغییر شکل های بزرگ و همچنین اثر بلوک اعمال بار نیز در مرجع [۲۷] مورد بررسی قرار گرفته است.

این مقاله اختصاص به بررسی رشد ترک بین لایه ای مود ۱ و تعیین انرژی شکست در نمونه DCB ساخته شده از ماده مرکب اپوکسی/ شیشه تک جهته دارد. در این راستا آزمایش های استاندارد کشش و برش روی این ماده تولید شده انجام شده و ثابت های ماده اندازه گیری شده اند. با انجام آزمایشاتی رشد ترک بین لایه ای در نمونه DCB نیز بررسی شده و انرژی شکست G_{Ic} با استفاده از روش های استاندارد پردازش اطلاعات محاسبه شده است. روشی معرفی شده که بر اساس مدل سازی رشد ترک با استفاده از روش اجزاء محدود در نمونه بوده و بتوسط آن می توان انرژی شکست را فقط با استفاده از اطلاعات آزمایشگاهی نیرو- تغییر مکان بدست آورد. و بدین ترتیب می توان بدون استفاده از اطلاعات آزمایشگاهی طول ترک که پر خطا ترین قسمت آزمایش می باشد انرژی شکست

یکی از مودهای گسیختگی مواد مرکب لایه ای جدایش لایه ها است که در بارهای نسبتاً کم رخ می دهد. این مود گاهی به تنهایی و اغلب بعنوان تشدید کننده مودهای دیگر، یکی از عوامل مهم گسیختگی محسوب می شود [۳-۵]. جدایش لایه ها معمولاً در اثر یکی از عوامل زیر ایجاد می گردد:

□ تشکیل تنش سه بعدی در اطراف محل های تغییر ضخامت، ناپیوستگی ها و یا لبه های آزاد

□ عدم دقت کافی در تولید که سبب حبس شدن حباب های هوا و یا ذرات خارجی در بین لایه ها می گردد

□ ضربه و برخورد اجسام خارجی

با توجه به گستردگی عوامل ایجاد جدایش لایه ها، کاملاً مشهود است که احتمال جدایی لایه ها در قطعات ساخته شده از مواد مرکب لایه ای بسیار زیاد است. بنابراین گسترش روشی برای تحلیل این مود گسیختگی می تواند کاربردهای زیادی داشته باشد. یکی از روش های متداول برای تحلیل جدایش لایه ها، مدل نمودن جدایی لایه ها مشابه یک ترک در عمق (ترک بین لایه ای) است. در این صورت می توان از روش های مکانیک شکست الاستیک خطی استفاده نموده و علاوه بر تعیین تاثیر ترک در استحکام و ظرفیت باربری قطعه، نحوه رشد ترک و نهایتاً عمر کاری قطعه را برآورد نمود. همانند یک ترک در مواد ایزوتروپیک، جدایی لایه ها می تواند تحت سه مود تغییر مکان (بازشدگی، بریدگی و پارگی) اتفاق بیافتد.

از بین کارهایی که در این زمینه انجام گرفته است می توان به مرجع [۲۰] اشاره نمود که در آن جهت افزایش دقت آزمایشات DCB تحت مود ۱ جابجایی، تغییراتی در نمونه استاندارد داده شده است. در این مرجع نشان داده شده است که برای آزمایش نمونه های چند جهته بهتر است لبه های نمونه در طول نمونه در سطح پیش ترک نیز دارای لایه نجسب باشد. در این حالت ترک از سطح اولیه خارج نشده و در نتیجه جواب های دقیق تری را می توان بدست آورد. در همین رابطه مرجع [۲۳] نیز تغییر مسیر ترک اولیه در نمونه DCB را به ضخامت لایه نجسب وارد شده بین لایه ها منصوب نموده است و با انجام آزمایشات متعدد ثابت نموده است که ضخامت لایه نجسب باید تا حد امکان کم باشد. مقاله [۲۴] تغییر مسیر ترک را به شعاع نوک پیش ترک ایجاد شده مرتبط نموده است. تحلیل تنش انجام شده نشان داده است که هر چه شعاع

ابعاد مورد نیاز نمونه ها برش می دهیم.

آزمایش کشش نمونه های تک جهت

پنج نمونه تک جهت بر طبق توصیه های استاندارد ASTM [۷] تولید شده که دو نمونه از آنها مجهز به کرنش سنج بوده تا بتوان در هنگام اعمال بار کششی، کرنش جانبی را نیز بدست آورد. از نسبت کرنش جانبی به کرنش طولی می توان یکی از ضرایب پواسون را تعیین نمود. شکل نمونه، اطلاعات و نتایج این آزمایشات در ضمیمه (۱) داده شده است. بطور میانگین ضریب ارتجاعی E_{11} (که در آن ۱ نشاندهنده جهت الیاف است) برابر $44/398 \text{ GPa}$ و ضریب پواسون ν_{12} (که در آن ۲ جهت عمود بر الیاف است) برابر $0/263$ بدست آمده است.

آزمایش کشش نمونه های تک جهت در جهت عمود بر الیاف

سه نمونه با الیاف در جهت عرض نمونه (الیاف ۹۰ درجه) تولید شده و همانند آزمایشات نمونه های صفر درجه بر طبق استاندارد ASTM [۷] مورد آزمایش کشش قرار گرفته است. میانگین ضریب ارتجاعی در این حالت E_{22} برابر $10/392 \text{ GPa}$ بدست آمده است. برای جزئیات این آزمایش به ضمیمه (۲) رجوع شود.

آزمایش کشش نمونه های $\pm 45^\circ$ درجه برای تعیین ضریب ارتجاعی برشی

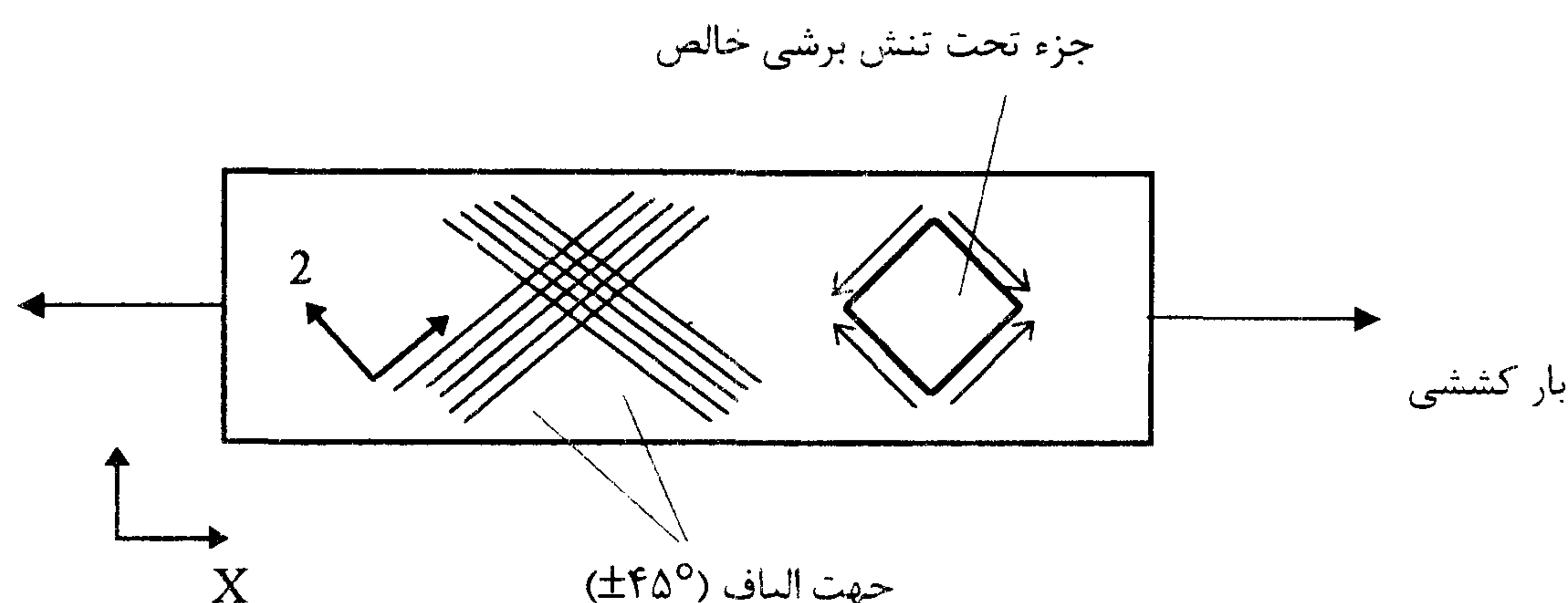
روش های متنوعی برای تعیین ضریب ارتجاعی برشی لایه های تک جهت وجود دارد که از آن جمله می توان روش های دو ریلی [۸]، روش سه ریلی [۸] و روش تیر کوتاه [۹] را نام برد. یکی از متداول ترین روش ها استفاده از نمونه های کشش با زاویه الیاف $\pm 45^\circ$ است. روش آزمایش با استفاده از این نمونه ها در استاندارد ASTM با شماره مشخصه D3518 [۱۰] بتفصیل آمده است. تعیین ضریب برشی بر اساس پاسخ تنش-کرنش کششی تک محوره با لایه هایی که بطور متقارن (نسبت به صفحه میانی) چیده شده اند بنا گردیده است. بر طبق تئوری لایه ای صفحه ای، اگر لایه های $\pm 45^\circ$ تحت کشش تک محوره در مختصات مطلق (XY) قرار گیرد در محور های مختصات اصلی لایه ها (۱۲) تنش ایجاد شده بصورت برش خالص خواهد بود (شکل ۲).

را محاسبه نمود. نشان داده شده است که این روش مزایای زیادی داشته و می تواند بصورت کاربردی در انجام آزمایشات DCB مطرح گردد.

ساخت نمونه ها و اندازه گیری خواص مکانیکی ماده مرکب شیشه- اپوکسی

ابتدا دو صفحه آهنی به ابعاد $200 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$ و ضخامت 15 mm تهیه نموده و سطوح آن را از همه طرف فرز کاری می کنیم تا گونیا شود. سپس سطوحی را که قرار است لایه ها بین آنها چیده شوند را توسط دستگاه سنگ زنی پرداخت می نماییم. این دو بعنوان فک های بالایی و پایینی قالب عمل می کنند. الیاف شیشه که بصورت پارچه در دسترس هستند را به تعداد کافی به ابعاد قالب برش می دهیم. تعداد لایه های مورد نیاز در هر آزمایش بستگی به ضخامت مورد نیاز دارد. ضخامت هر لایه تولید شده با این پارچه در حدود $0/22 \text{ mm}$ می باشد.

فک های بالا و پایین قالب را به واکس جدا کننده آغشته می کنیم تا بعد از چیدن لایه ها بتوان قالب را از ورق تولید شده جدا نمود. سپس با قلمو پارچه ها را تک تک به رزین اپوکسی آغشته نموده و روی فک پایینی قالب قرار می دهیم. رزین اپوکسی استفاده شده از نوع ۸۰۵۰ بوده که به ازای $860 \text{ گرم آن } 140 \text{ گرم سخت کننده}$ به آن افزوده شده است. (خواص مکانیکی و شیمیایی این رزین در مرجع [۶] داده شده است.) بعد از قرار دادن هر لایه جهت خروج رزین اضافی و همچنین خروج حباب های هوا، غلتکی را روی هر لایه می کشیم. بعد از قرار دادن کلیه لایه ها، فک بالایی قالب روی لایه ها گذاشته و مجموعه را زیر پرس قرار می دهیم. در نمونه هایی که برای آزمایش ترک بین لایه ای مورد استفاده قرار خواهند گرفت، نواری از تفلون به ضخامت $0/25 \text{ mm}$ در بین لایه میانی قرار داده می شود تا بعنوان پیش ترک در نمونه DCB عمل کند. رزین استفاده شده احتیاج به حرارت اضافی برای پخت نداشته و در طی هفت روز در دمای محیط کاملاً مستحکم می گردد جهت افزایش چقرمگی، مجموعه را داخل کوره گذاشته و به مدت ۲ ساعت حرارتی معادل 100° درجه سانتیگراد به آن اعمال می نماییم. آنگاه فک ها را باز کرده و ورق تولید شده را خارج کرده و پس از برش کناره های آن، آن را به



شکل ۲: نمونه کششی با الیاف $(\pm 45^\circ)$ برای اندازه گیری ضریب ارتجاعی برشی لایه صفر درجه.

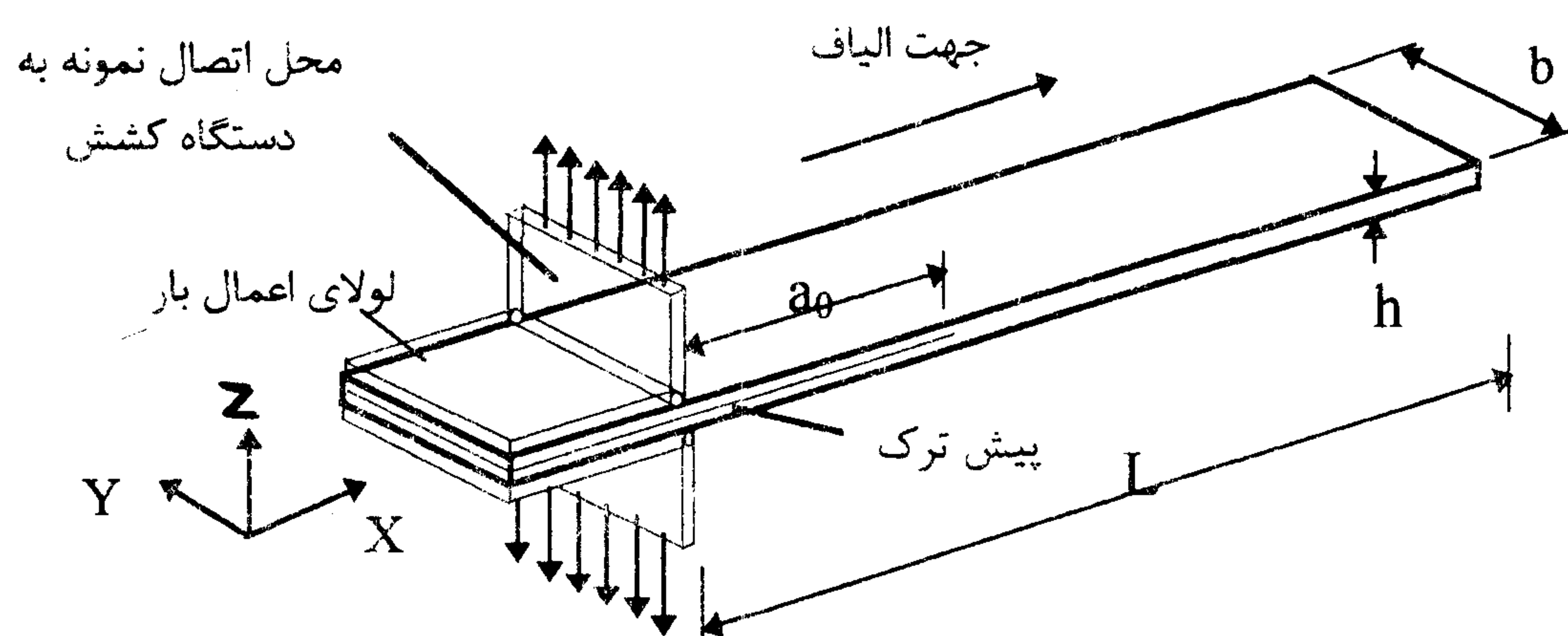
بسته شدن لبه به فک دستگاه کشش) و طول ترک بطور مرتب اندازه گیری و ذخیره می شوند. اطلاعات بدست آمده از آزمایش از قبیل نیروهای اعمالی برحسب باز شدگی لبه های نمونه توسط یک دستگاه رسام، رسم می گردد و بطور همزمان در یک کامپیوتر ذخیره می شود. مراحل رشد ترک می بایست با استفاده از یک دوربین چشمی با حداکثر دقت ممکن دنبال شود و مقادیر طول ترک در روی منحنی نیرو-تغییر مکان علامت گذاری شود. (جهت تسهیل در خواندن طول ترک، ابتدا لبه های نمونه را با یک رنگ ترد (مانند لاک غلط گیر) می پوشانیم. سپس اندازه های میلیمتری را روی آن علامت گذاری می کنیم. با رشد ترک خط سیاهی در صفحه میانی نمونه ظاهر می گردد که می توان طول آن را از روی اندازه های میلیمتری تعیین نمود.) با اطلاعات نیرو-تغییر مکان-طول ترک می توان استحکام شکست بین لایه ای را با استفاده از روش های مختلف برای هر طول ترک محاسبه نمود.

سه نمونه به ضخامت $h = 3 \text{ mm}$ و به طول mm $L = 125$ و پهنای $b = 25 \text{ mm}$ تولید شده که در صفحه

لذا با اندازه گیری کرنش در دو راستای عمود بر هم (ترجیحاً راستای اعمال بار و جهت عمود بر آن) می توان تغییرات تنش برشی (در راستای الیاف) را نسبت به کرنش برشی در این جهت ترسیم نمود. بدیهی است که این تغییرات در محدوده خطی ماده، بصورت خطی خواهد بود. بنابراین با تعیین شیب این خط می توان ضریب ارتجاعی برشی را بدست آورد. دو نمونه از این دست مورد آزمایش قرار گرفته و میانگین ضریب ارتجاعی برشی برابر $7/64 \text{ GPa}$ بدست آمده است. توضیحات بیشتر در مورد این آزمایشها در ضمیمه (۳) آورده شده است.

آزمایش DCB تحت مود ۱ تغییر مکان

نمونه آزمایش DCB مطابق شکل (۳) از یک صفحه مستطیلی با ضخامت یکنواخت تشکیل شده است که در آن یک لایه نازک از تفلون در بین لایه ها (در صفحه میانی) قرار داده شده تا سبب ایجاد یک پیش ترک در نمونه گردد. لبه های نمونه با کنترل فاصله جدایی و توسط حرکت دستگاه کشش از هم باز می شوند و در این فاصله، میزان باز شدگی لبه های نمونه از یکدیگر (محل

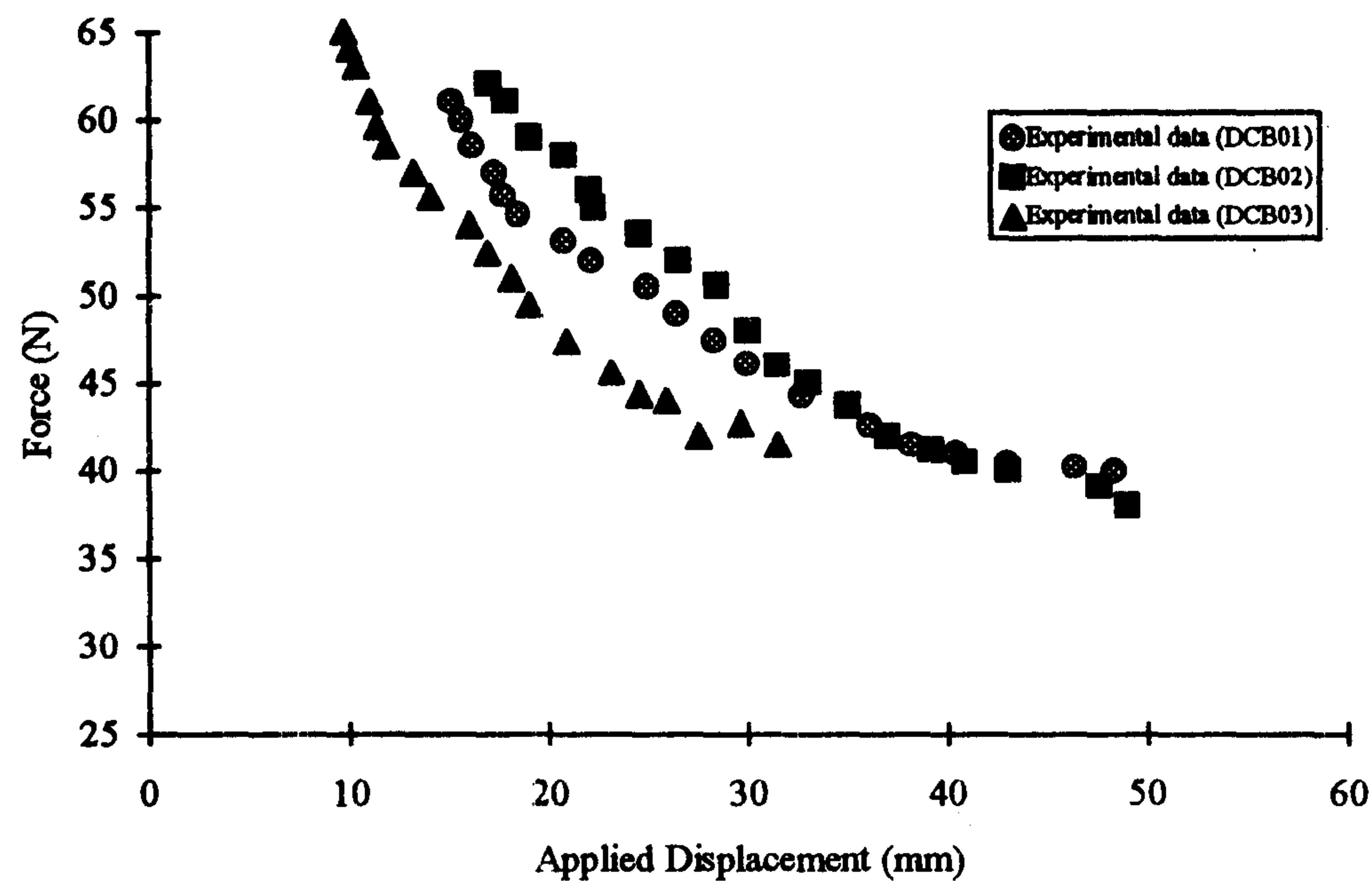


شکل ۳: نمونه DCB برای آزمایش رشد ترک بین لایه ای در مواد مرکب تک جهته.

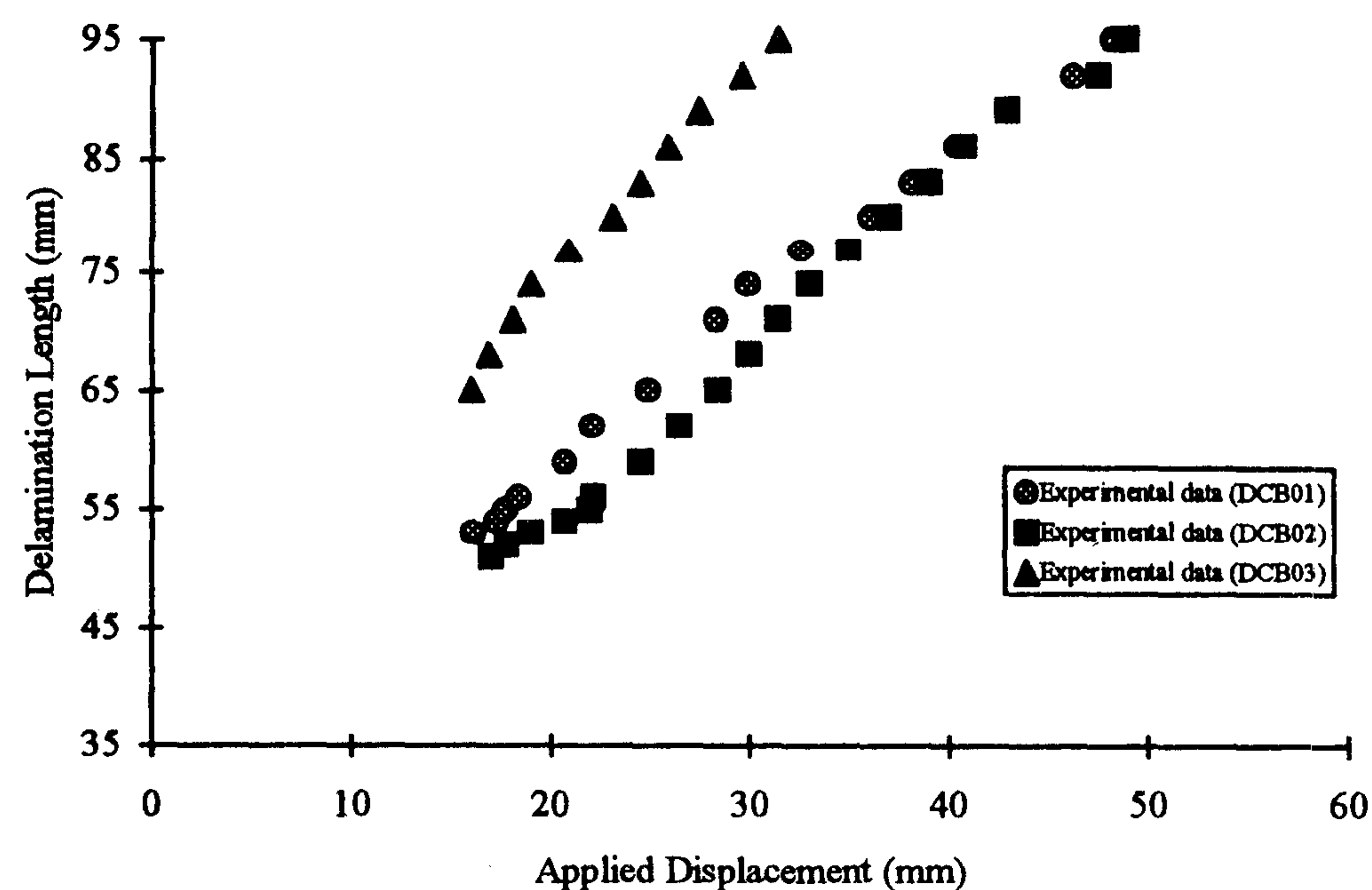
بنابراین امکان داده برداری در چندین مرحله فراهم بوده است. در این آزمایشات، در ۵ میلیمتر اول رشد ترک برای هر یک میلیمتر رشد یک داده برداشته شده و در مراحل بعدی برای هر ۵ میلیمتر یک داده برداشته شده است. این نحوه داده برداری با توصیه آزمایش استاندارد ASTM [۱۱] صورت گرفته است.

از اطلاعات نیرو-تغییر مکان-طول ترک بدست آمده از سه نمونه DCB، بنظر می رسد که نتایج حاصل از

میانی هر یک از این نمونه ها پیش ترکی به طول $a_0 = 50 \text{ mm}$ ایجاد شده است. با اعمال تغییر مکان به لبه های نمونه با میزان 1 mm/min نیروها و طول ترک را بطور مرتب اندازه گیری نموده و بتوسط یک کامپیوتر، اطلاعات را ذخیره می کنیم. تغییرات نیرو برحسب تغییر مکان و تغییرات طول ترک برحسب تغییر مکان اعمالی در اشکال (۴) و (۵) نشان داده شده اند. رشد ترک در بین لایه ها در هر سه نمونه از پایداری خوبی برخوردار بوده و



شکل ۴: تغییرات نیرو برحسب تغییر مکان اعمال شده در نمونه های DCB در حین رشد ترک بین لایه ای.



شکل ۵: تغییرات طول ترک بین لایه ای برحسب تغییر مکان اعمال شده در نمونه های DCB.

مراجع [۱۱-۱۳] بطور مفصل تشریح گردیده اند. در اینجا سه روش استاندارد برای پردازش اطلاعات مورد استفاده قرار گرفته که در زیر بطور مختصر معرفی شده اند:

آزمایش نمونه DCB01 میانگین نتایج سه نمونه باشد. لذا فقط نتایج این نمونه برای پردازش اطلاعات انتخاب می شود. روش های پردازش اطلاعات آزمایش DCB در

الف - تئوری تیر تصحیح شده

در این روش هر بازوی DCB یک تیر یکسر گیردار در نظر گرفته می شود. بر اساس رابطه بین نیرو و خیز یک تیر یکسر گیردار انرژی شکست بصورت زیر نوشته می شود:

$$G_{Ic} = \frac{3P \cdot \delta}{2b(a + \Delta)} \quad (1)$$

که در آن P نیروی هر بازو، δ بازشدگی بین دو بازو، b پهناي نمونه، a طول ترک (از محل اعمال بار) و Δ ضریب تصحیح است. این ضریب تصحیح برابر قدر مطلق عرض از مبدا خطی است که به تغییرات ریشه سوم نرمی نمونه $(C^{1/3})$ برحسب طول ترک (a) خورانده می شود. [۱۴]. شکل (۶) تغییرات ریشه سوم نرمی نمونه DCB01 را

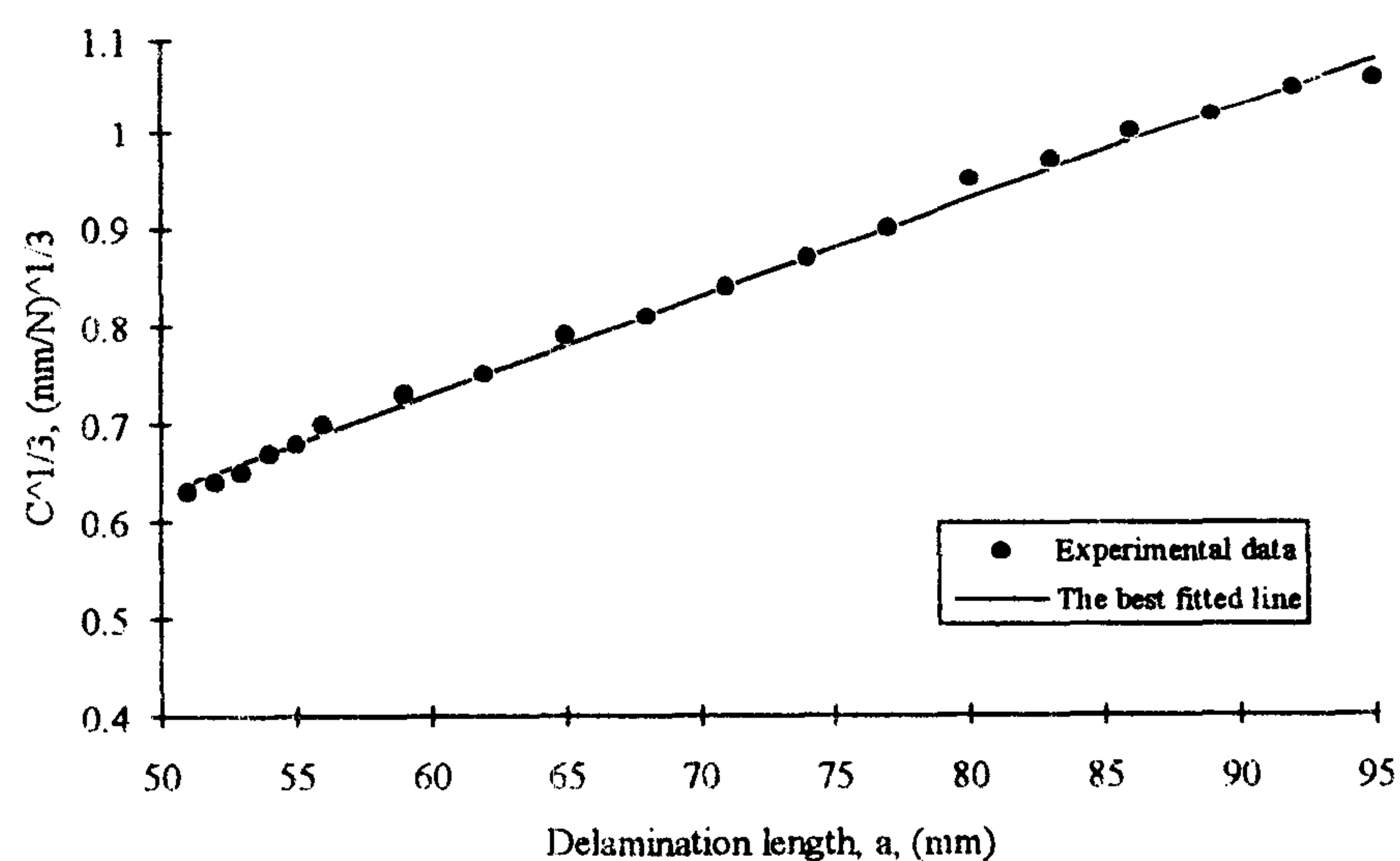
برحسب طول ترک و بهترین خط خورانده شده را نشان می دهد. از این خط، مقدار ضریب تصحیح Δ برابر $12/6$ mm بدست می آید.

ب - روش کالیبراسیون نرمی

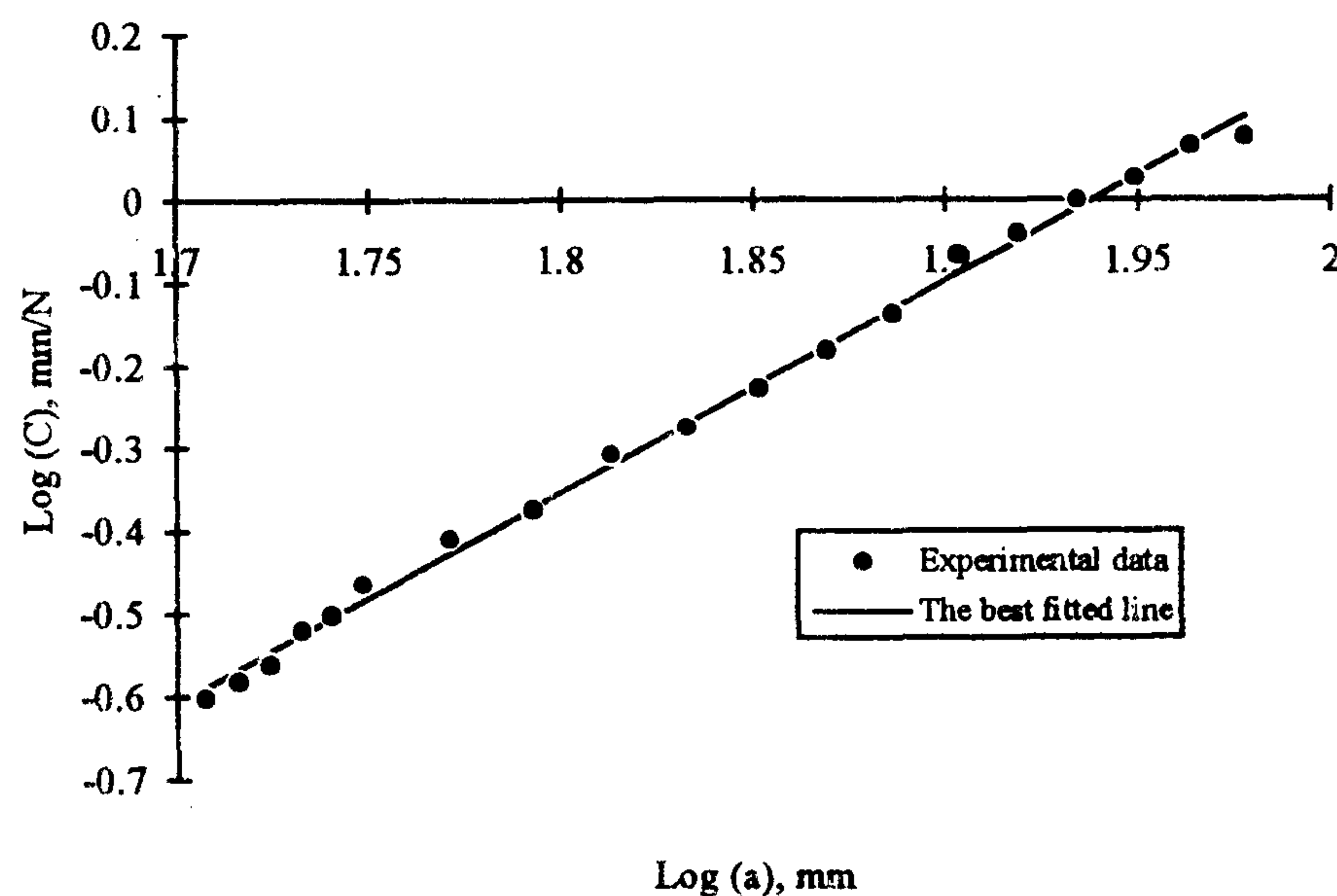
در این روش انرژی شکست G_{Ic} در نمونه DCB با رابطه زیر بیان می شود:

$$G_{Ic} = \frac{nP \cdot \delta}{2b \cdot a} \quad (2)$$

که در آن ضریب n شیب بهترین خط خورانده شده به منحنی تغییرات لگاریتم نرمی نمونه برحسب لگاریتم طول ترک است. برای نمونه مورد نظر با استفاده از شکل (۷) مقدار این ضریب برابر $2/553$ بدست می آید.



شکل ۶: تغییرات ریشه مکعب نرمی نمونه DCB برحسب طول ترک.



شکل ۷: تغییرات لگاریتم نرمی نمونه برحسب لگاریتم طول ترک.

است. این ضریب با توجه به شکل (۸) برای نمونه مورد نظر برابر ۳۳/۱۳۲ بدست می آید.

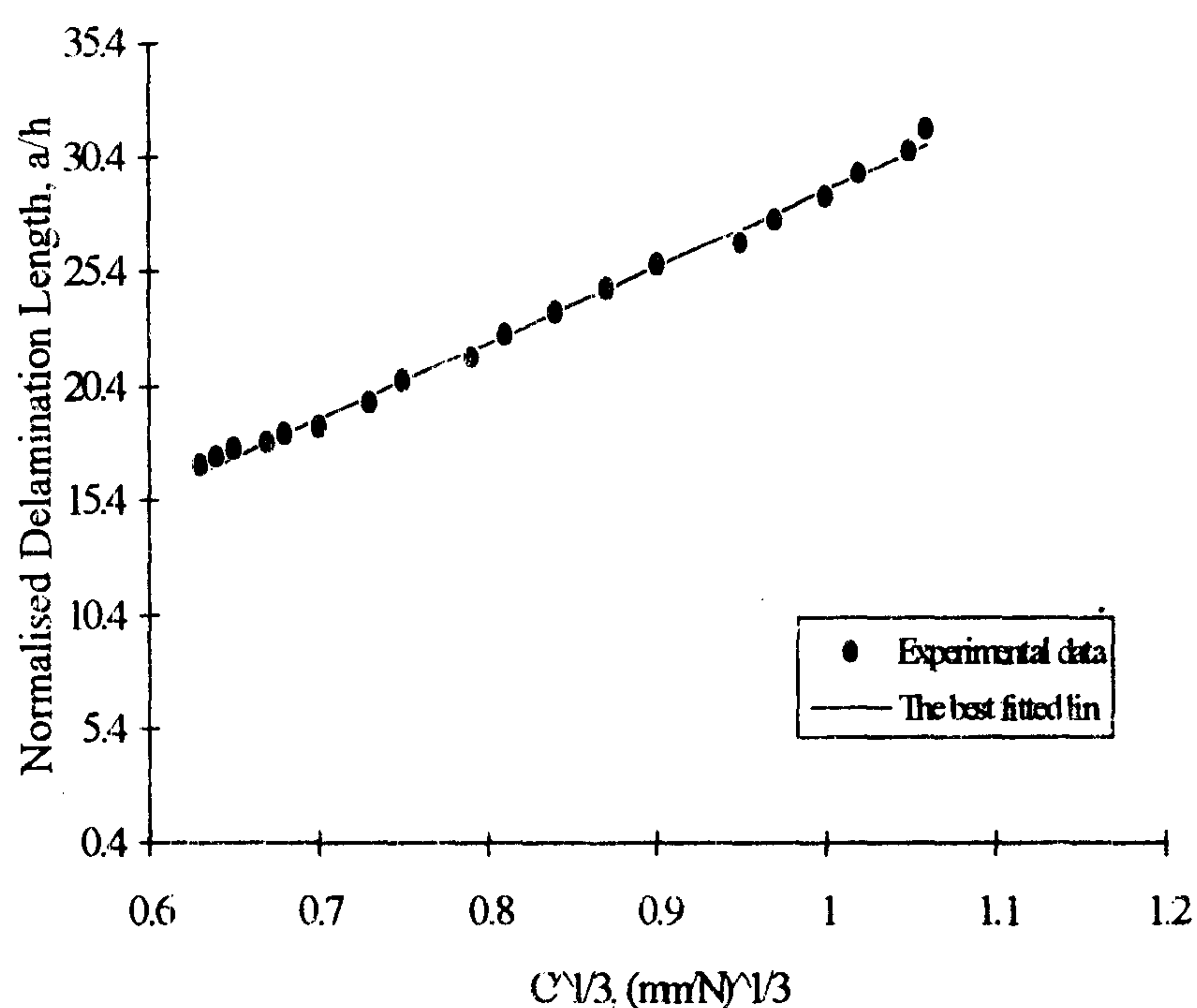
با استفاده از سه روش بالا انرژی شکست نمونه DCB01 در طول های مختلف ترک محاسبه شده و نتایج در شکل (۹) نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می شود هر سه روش جوابهایی نزدیک به یکدیگر می دهند. همچنین دیده می شود که اساساً انرژی شکست در طول ثابتی رشد ترک در بین لایه ها مقدار ثابتی است.

ج - روش تصحیح شده کالیبرسیون نرمی

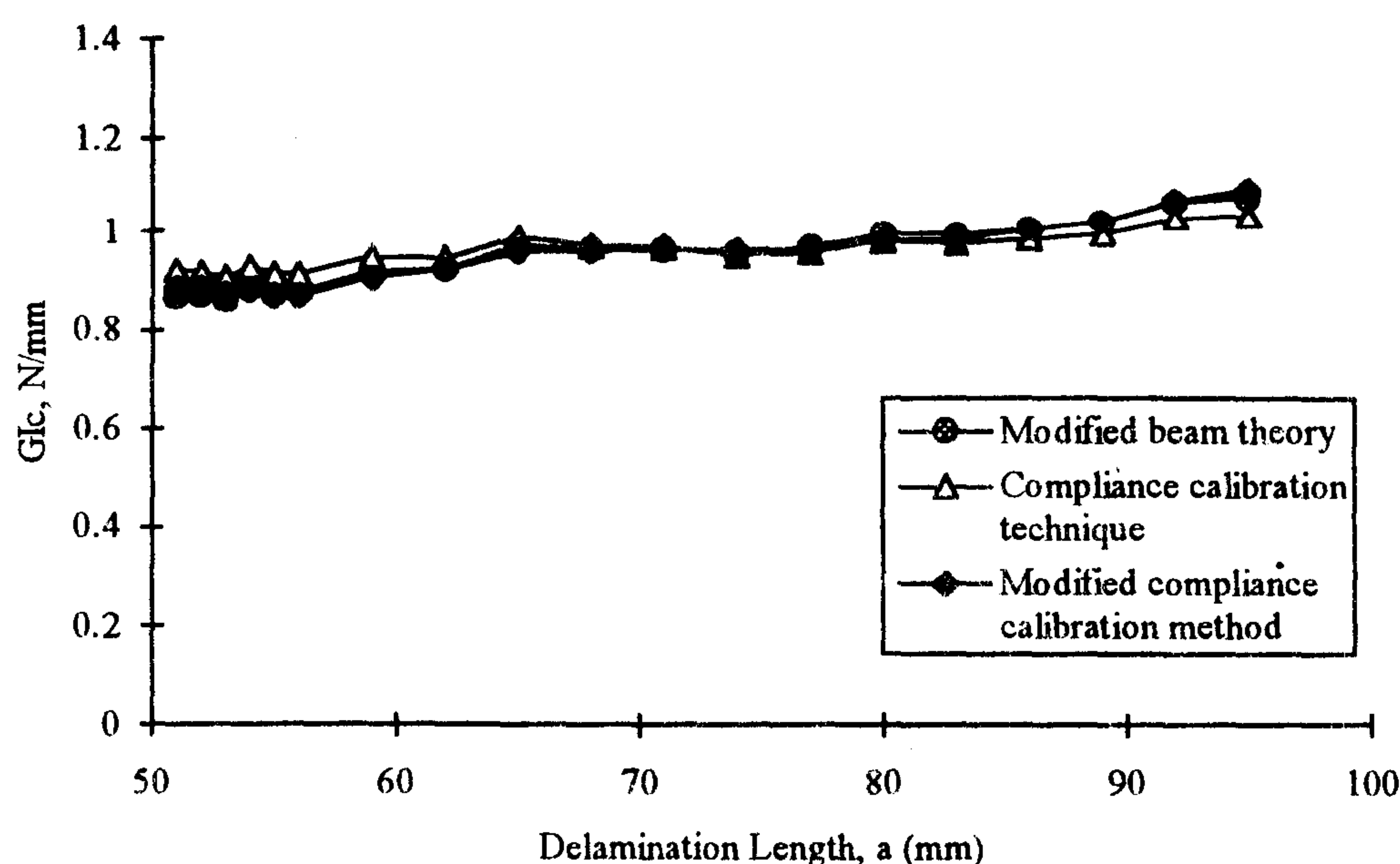
در این روش انرژی شکست G_{Ic} با رابطه زیر بیان می گردد:

$$G_{Ic} = \frac{3P^2 C^{2/3}}{2A_1 b h} \quad (3)$$

که در آن A_1 شیب بهترین خط خورنده شده به منحنی تغییرات نسبت a/h برحسب ریشه سوم نرمی نمونه ($C^{1/3}$)



شکل ۸: تغییرات نسبت a/h برحسب ریشه سوم نرمی نمونه.



شکل ۹: انرژی شکست بین لایه ای برای نمونه DCB01.

در نمونه مورد نظر برای بارگذاری های مختلف است. بدین صورت که برای یک بارگذاری معین، موقعیت نوک یا پروفیل ترک به گونه ای تعیین می شود که میزان رهایی

مدل سازی رشد ترک در نمونه DCB

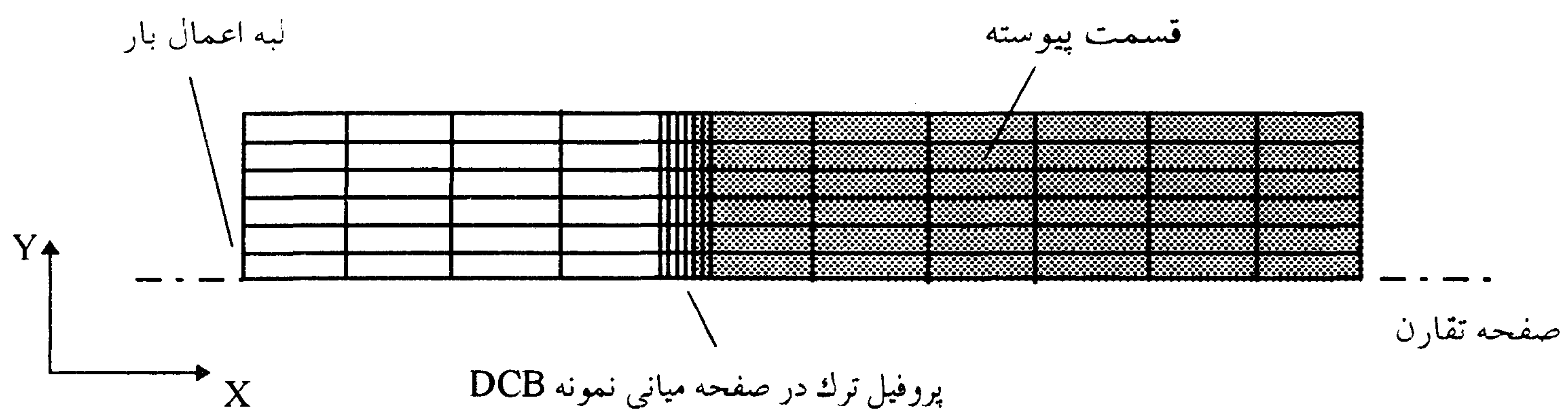
مدل سازی رشد ترک در نمونه DCB بر مبنای اقلای شرط برابری میزان رهایی انرژی کرنشی با انرژی شکست

برشی در جهت ضخامت در محاسبات وارد شود. به گره های موجود در قسمت پیوسته نمونه تکیه گاههایی در جهت Z اعمال شده است تا قسمت ترک نخورده را مدل نماید. از اعمال تکیه گاههای تغییر مکان زاویه ای (قیود دورانی) به قسمت پیوسته مدل صرفنظر شده است. این امر سبب می شود که اثرات تغییر شکل برشی در پروفیل ترک در محاسبات منظور گردد. یک بررسی نشان می دهد که اعمال تکیه گاههای دورانی در طول های کوتاه ترک می تواند تا ۱۵٪ خطا در میزان رهایی انرژی کرنشی محاسبه شده ایجاد نماید [۱۹].

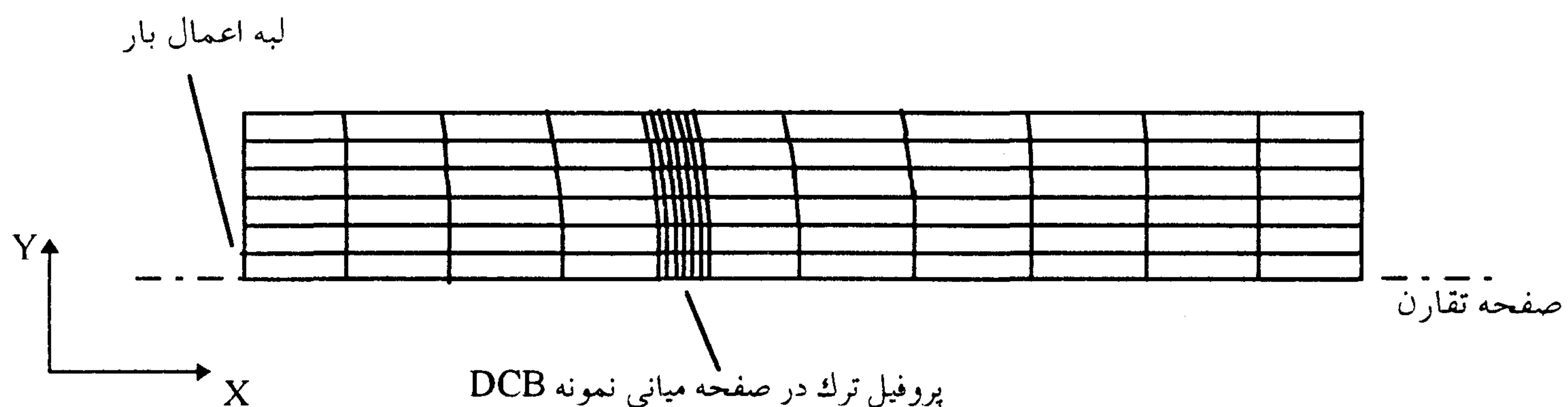
شکل پروفیل ترک در هنگام رشد در شکل (۱۱) نشان داده شده است. شکل ترک در هنگام رشد تابعی از توزیع میزان رهایی انرژی کرنشی در طول پروفیل ترک می باشد. بدلیل انحنای زین اسبی صفحات ارتوتروپیک، میزان رهایی انرژی کرنشی در لبه نمونه قدری کمتر از میزان رهایی انرژی کرنشی در وسط صفحه است. بنابراین طول ترک در لبه های نمونه کمتر از طول ترک در وسط صفحه است. محاسبات نشان می دهد که در نمونه مورد نظر طول ترک در لبه نمونه حدود ۰/۶ mm کمتر از طول ترک در وسط صفحه است. شکل پروفیل ترک بدست آمده از

انرژی کرنشی (G) برابر انرژی شکست (G_{Ic}) گردد. کلیات این روش و نحوه محاسبه میزان رهایی انرژی کرنشی با استفاده از روش اجزای محدود در مراجع [۱۸-۱۵ و ۱۳ و ۱۲] بطور کامل آمده است. در این مراجع نشان داده شده است که روش مورد نظر بسیار کارا و دقیق بوده و قادر به مدل سازی رشد ترک با هر هندسه ای می باشد. در این مقاله از روش مورد نظر استفاده شده و رشد ترک بین لایه ای در نمونه DCB برای مقادیر مختلف پیش فرض انرژی شکست شبیه سازی شده است. از این شبیه سازی می توان تغییرات نیرو و تغییر مکان در محل اعمال بار را برحسب طول ترک برای هر مقدار پیش فرض انرژی شکست محاسبه نمود.

مدل اجزای محدود استفاده شده برای این مدل سازی در شکل (۱۰) نشان داده شده است. بدلیل تقارن در هندسه و بارگذاری نمونه DCB فقط یک ربع نمونه بصورت اجزای محدود مدل شده است. مدل از ۹۶ المان هشت گره ای صفحه با قابلیت تغییر شکل برشی تشکیل شده است. در این المان ها مقادیر ضریب ارتجاعی برشی در جهت ضخامت ۰/۸ برابر ضریب ارتجاعی برشی در صفحه در نظر گرفته شده تا اثر توزیع سهمی شکل تنش



شکل ۱۰: مدل اجزای محدود برای یک ربع نمونه DCB.

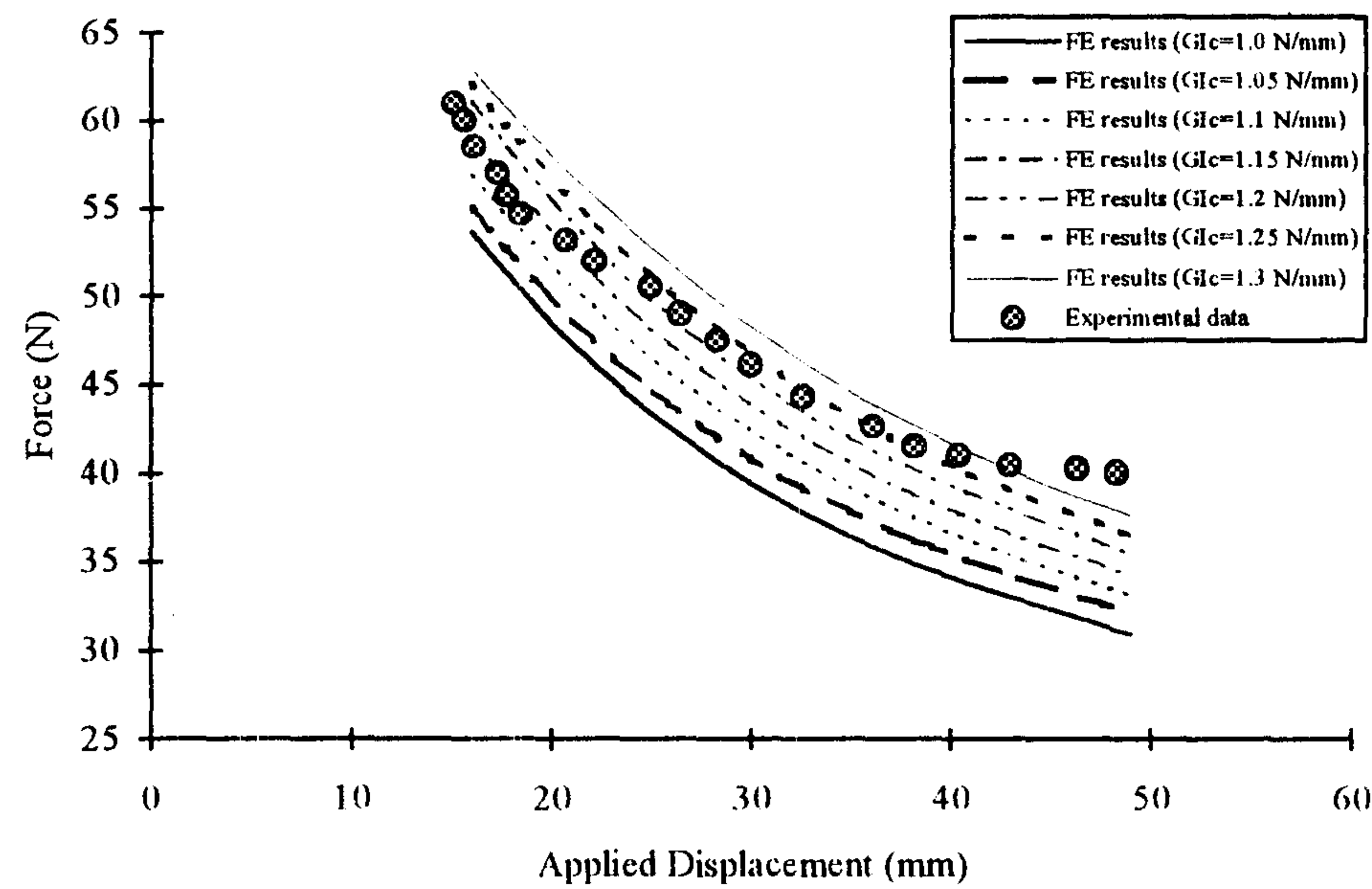


شکل ۱۱: شکل پروفیل ترک در نمونه DCB در هنگام رشد.

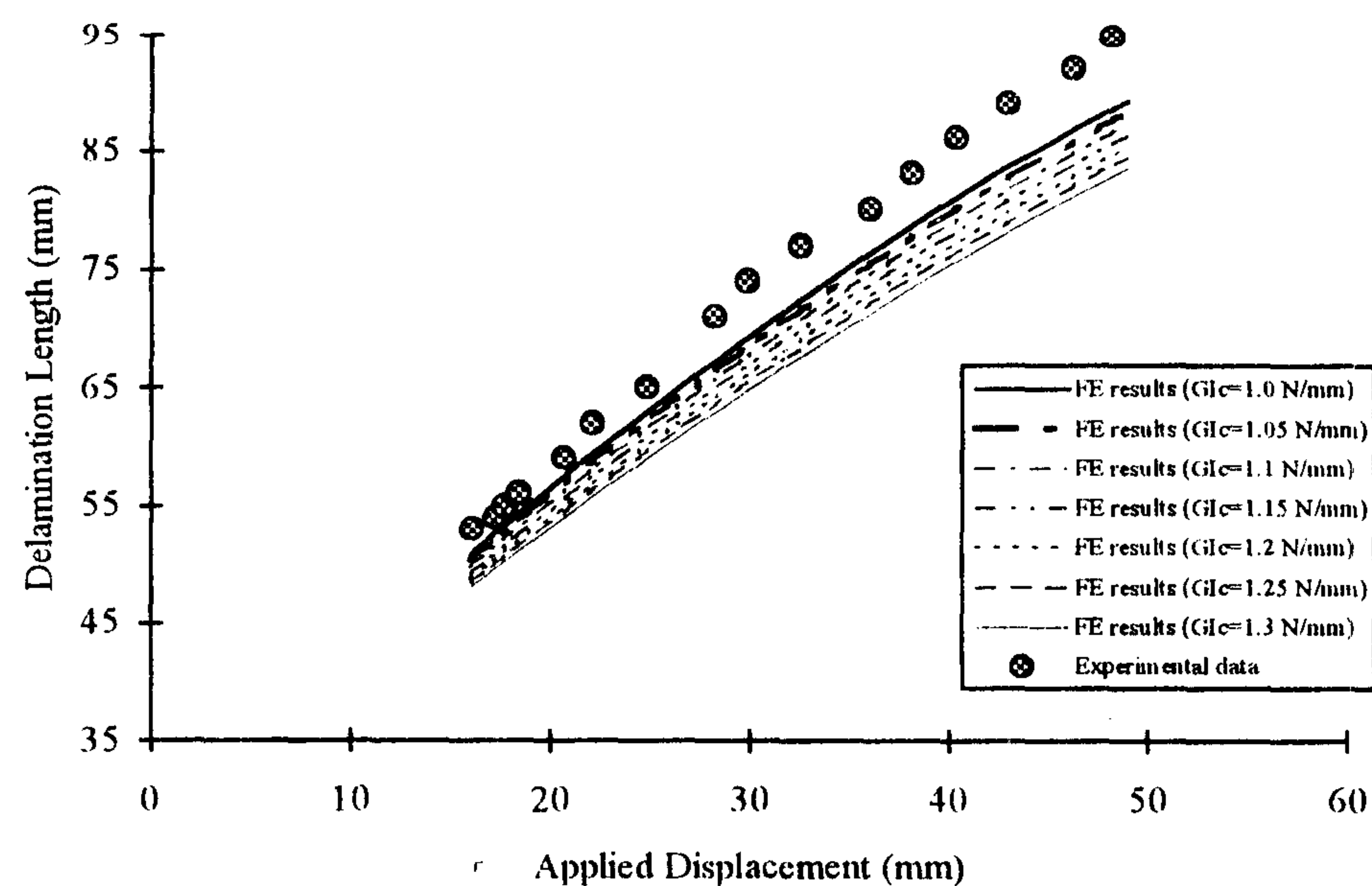
نمونه محاسبه و ذخیره می شوند. تغییر مکان اعمالی سپس قدری افزایش یافته و فرایند کار تکرار می شود. عملیات تکرار و تعیین موقعیت و شکل پروفیل ترک در هر مقدار تغییر مکان اعمالی در یک برنامه اجزای محدود، برنامه شده بطوری که کل عملیات محاسباتی بطور خودکار انجام می پذیرد [۱۵ و ۱۳]. بنابراین برای هر مقدار پیش فرض انرژی شکست می توان اطلاعات نیرو-تغییر مکان- طول ترک را مشابه آزمایش DCB بدست آورد. نتیجه کار سری منحنی هایی است که به همراه نتایج آزمایش برای نمونه DCB01 در اشکال (۱۲) و (۱۳) نشان داده شده است.

محاسبات با مشاهدات تجربی کاملاً هماهنگی دارد. چنین شکل ترکی در نمونه های DCB ساخته شده از مواد مرکب اپوکسی/کربن نیز مشاهده شده و در مراجع [۲۰ و ۲۱] گزارش شده است.

برای هفت مقدار مختلف انرژی شکست گسترش ترک بین لایه ای در طول نمونه شبیه سازی شده است. در هر مرحله برای مقدار مشخصی از تغییر مکان اعمالی، پروفیل ترک طوری پیدا شده که شرط برابری میزان رهایی انرژی کرنشی با انرژی شکست پیش فرض در هر المان، قرار گرفته روی پروفیل ترک، اثناء گردد. در چنین موقعیتی نیروی اعمال شده به لبه اعمال بار و طول ترک از لبه



شکل ۱۲: سری منحنی های نیرو-تغییر مکان برای مقادیر مختلف پیش فرض انرژی شکست به همراه نتایج آزمایشگاهی برای نمونه DCB01.



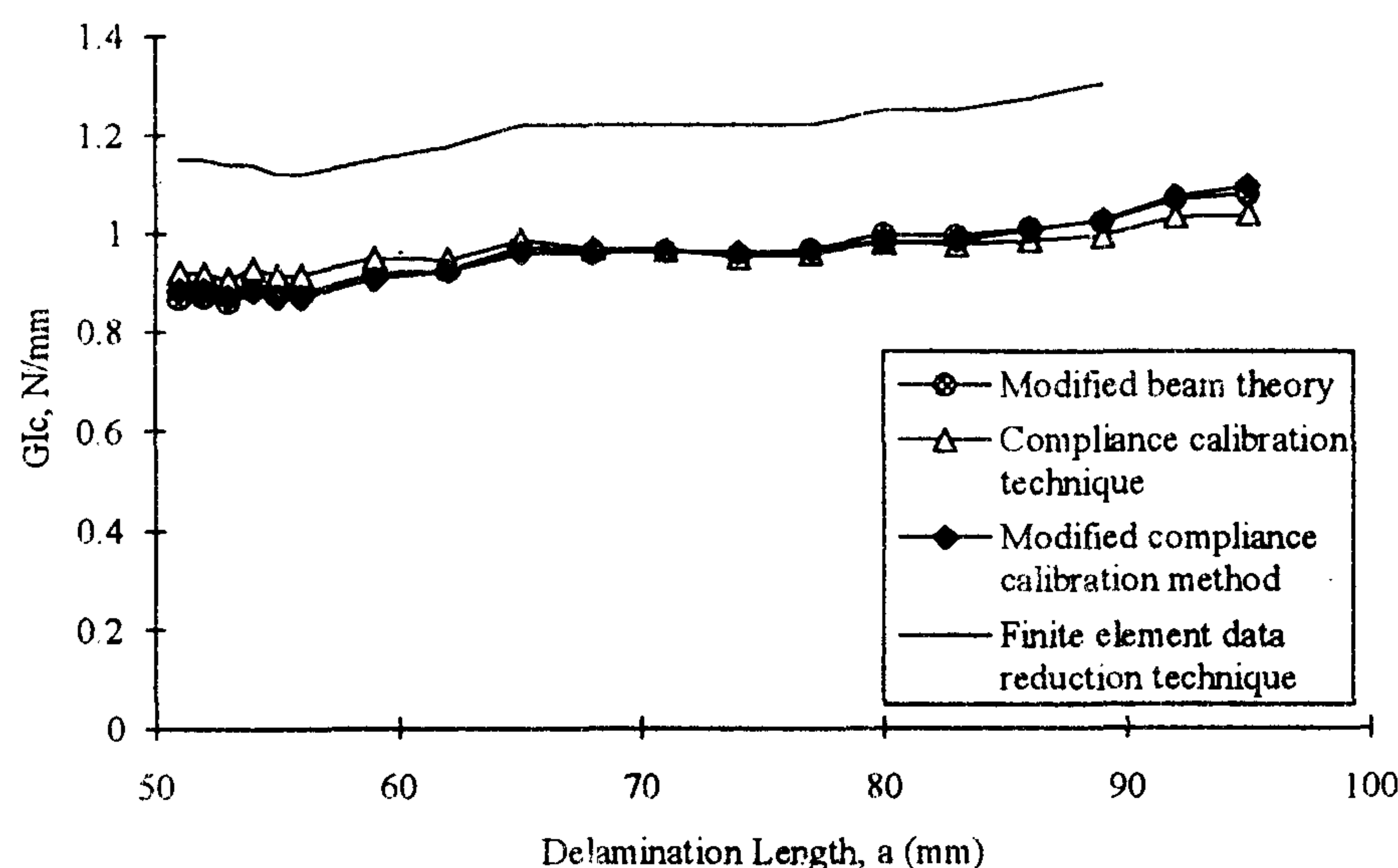
شکل ۱۳: سری منحنی های طول ترک- تغییر مکان برای مقادیر مختلف پیش فرض انرژی شکست به همراه نتایج آزمایشگاهی برای نمونه DCB01.

خوانده شده بزرگتر از آنچه توسط روش اجزای محدود پیش بینی می شود بوده است. در هنگام آزمایش ایجاد خطا در خواندن طول ترک بسیار محتمل است. در اینجا باید عنوان نمود که اگر مقدار طول ترک خوانده شده در هر نقطه به مقدار ثابتی بزرگتر و یا کوچکتر باشد ضرایب تصحیح در نظر گرفته شده در روش های پردازش اطلاعات این خطا را جبران می نمایند. بعنوان مثال در شکل (۱۵-الف) می بینیم که ضریب Δ (در روش تئوری تیر تصحیح شده) مقدار خطا در طول ترک را جبران می کند. ولیکن اگر مقدار خطا در خواندن طول ترک طوری باشد که با افزایش طول ترک این خطا نیز افزایش پیدا کند (مانند شکل (۱۵-ب)) آنگاه مقدار ضریب تصحیح اثر منفی داشته و به ازدیاد خطا دامن خواهد زد. بطوری که علاوه بر افزایش خطا در خواندن طول ترک مقدار ضریب تصحیح نیز افزایش یافته و در نتیجه مقدار طول ترک قرار داده شده در معادله (۱) بسیار بیشتر از مقدار واقعی خواهد شد که این به نوبه خود انرژی شکست کمتری را بدست خواهد داد. با توجه به شکل (۱۳) مشاهده می شود که حالت دوم در نتایج این آزمایش اتفاق افتاده است و مقدار خطا در خواندن طول ترک همگام با رشد ترک، افزایش یافته است و این می تواند علت اصلی وجود ۲۰٪ خطا در انرژی شکست باشد.

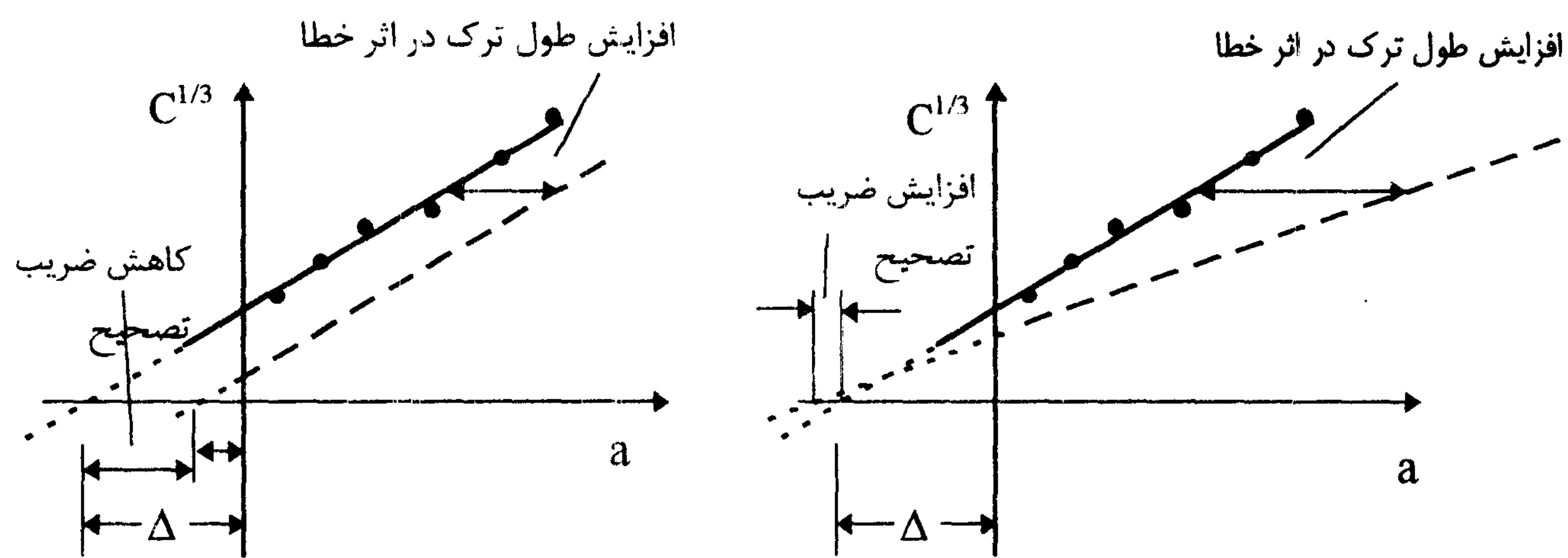
خطای موجود در طول های ترک بدست آمده از آزمایش را به طریق دیگری نیز مورد بررسی قرار داد. از تئوری

در نمونه DCB، مقادیر نیرو-تغییر مکان-طول ترک-انرژی شکست به یکدیگر وابسته هستند بنحوی که فقط سه متغیر از این چهار پارامتر باید مستقل باشند. برای یک نمونه واقعی در دسترس، انرژی شکست که از خواص ماده است مقدار معینی می باشد. بنابراین بین سه متغیر نیرو-تغییر مکان-طول ترک باید فقط دو متغیر مستقل وجود داشته باشد. لذا باید بتوان با مقایسه منحنی نیرو-تغییر مکان با منحنی های عددی شکل (۱۲)، مقادیر انرژی شکست را توسط درون یابی به ازای هر مقدار تغییر مکان اعمالی بدست آورد بدون اینکه هیچ نیازی به طول ترک باشد. بنابراین با درون یابی از منحنی های نیرو-تغییر مکان عددی، مقدار G_{Ic} برای هر نقطه از منحنی نیرو-تغییر مکان تجربی بدست می آید. بامعلوم بودن تغییر مکان اعمالی و G_{Ic} حال می توان طول ترک را نیز با استفاده از منحنی های تغییر مکان-طول ترک بدست آورد.

در شکل (۱۴) انرژی شکست محاسبه شده از این طریق به همراه انرژی های شکست محاسبه شده از روش های دیگر (قسمت ۳) نشان داده شده اند. ملاحظه می شود که انرژی شکست محاسبه شده از روش اجزای محدود بطور میانگین حدود ۲۰٪ بالاتر از انرژی محاسبه شده توسط روش های دیگر است. منشاء این اختلاف نسبتاً زیاد، خطا در خواندن طول ترک در هنگام آزمایش می باشد. از شکل (۱۳) کاملاً مشخص است که طول ترک



شکل ۱۴: انرژی شکست محاسبه شده از روش اجزای محدود به همراه انرژی محاسبه شده از روش های دیگر.



شکل (۱۵-الف)

شکل (۱۵-ب)

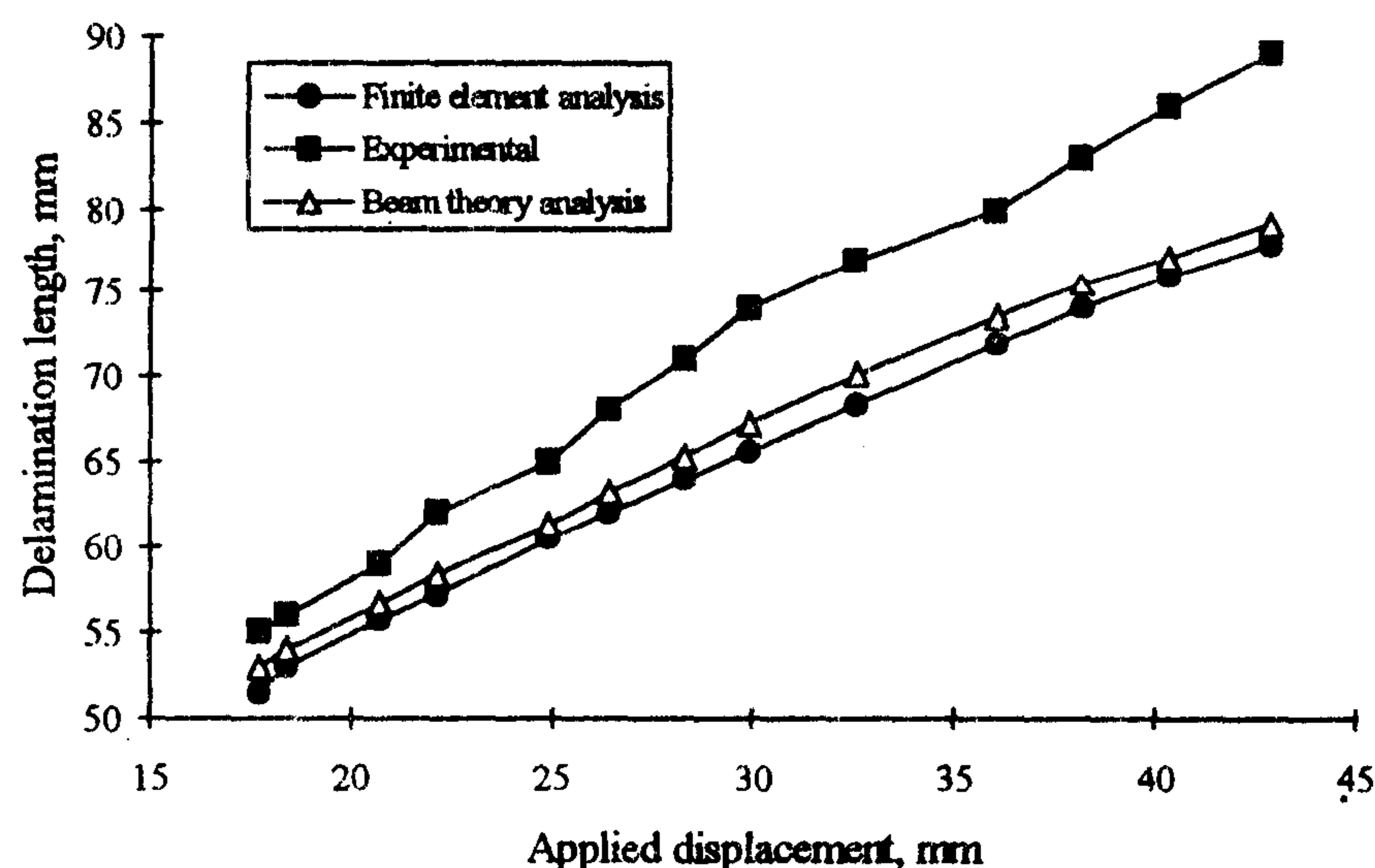
شکل ۱۵: اثر خطا در خواندن طول ترک در روش تئوری تیر تصحیح شده.

آورد. اکنون برای مقادیر نیرو و تغییر مکان های تجربی، طول ترک را محاسبه و با طول های ترک تجربی و طول های ترک محاسبه شده از این روش اجزای محدود مقایسه می نماییم. نتیجه این مقایسه در شکل (۱۶) نشان داده شده است. دیده می شود که طول های ترک محاسبه شده از رابطه (۴) تطابق خوبی با طول های ترک محاسبه شده از روش اجزای محدود دارد در حالی که طول های ترک بدست آمده از آزمایش خطای قابل توجه ای را نشان می دهند.

تیرها می توان ضریب ارتجاعی E_{11} نمونه تک جهت را بصورت زیر برحسب طول ترک، نیرو و تغییر مکان بیان نمود [۲۲]:

$$E_{11} = \frac{64(a + \Delta)^3 \cdot P}{\delta \cdot b \cdot h^3} \quad (4)$$

با توجه به معلوم E_{11} برای مواد این نمونه ها می توان برای $\Delta = 12/6 \text{ mm}$ و مقادیر نیرو و تغییر مکان های مختلف، طول ترک، a را بدست



شکل ۱۶: تغییرات طول ترک برحسب تغییر مکان اعمال شده به لبه های نمونه.

انجام شده نتایج زیر استنباط می شود:

۱- رشد ترک بین لایه ای در این ماده مرکب از پایداری خوبی برخوردار بوده و می توان با افزایش تدریجی تغییر مکان اعمالی در طول های ترک مختلف، انرژی شکست را

نتیجه گیری

در این مقاله نتایج آزمایش برای ارزیابی انرژی شکست بین لایه ای در مواد مرکب اپوکسی / شیشه تک جهت با استفاده از نمونه DCB ارائه گردیده است. بر اساس کار

محاسبه نمود.

۲- در آزمایش DCB پردازش اطلاعات و تعیین دقیق انرژی شکست تابع دقت اطلاعات نیرو - تغییر مکان - طول ترک می باشد. سه روش مختلف پردازش اطلاعات (روش تئوری تیر تصحیح شده، روش کالیبراسیون نرمی و روش کالیبراسیون نرمی تصحیح شده) برای محاسبه انرژی شکست مورد استفاده قرار گرفته است. نشان داده شده که هر سه روش اساساً جواب های مشابه می دهند.

۳- دقت در تعیین دقیق اطلاعات نیرو-تغییر مکان-طول ترک نقش اساسی در دقت انرژی شکست تعیین شده دارد. از بین این سه داده، طول ترک به صورت چشمی توسط آزمایش کننده خوانده می شود در حالی که اطلاعات نیرو-تغییر مکان توسط ماشین کشش اندازه گیری و ذخیره می شوند. بنابراین معمولاً طول ترک دارای دقت کمتری نسبت به سایر اطلاعات است. در روش تئوری تیر (بعنوان نمونه) نشان داده شده است که وجود خطا در طول های ترک آزمایشگاهی در صورتی که مقدار خطا با افزایش طول ترک، افزایش یابد می تواند اثر زیادی در انرژی شکست محاسبه شده داشته باشد.

۴- روشی برای پردازش اطلاعات بر اساس مدل سازی

رشد ترک در نمونه DCB با استفاده از روش اجزای محدود معرفی شده است. در این روش فقط با داده های نیرو-تغییر مکان می توان انرژی شکست را محاسبه نمود. با توجه به اینکه داده های نیرو-تغییر مکان معمولاً توسط دستگاه آزمایش اندازه گیری می گردند، می توان دقت بیشتری را از این روش انتظار داشت. گرچه استفاده از این روش مستلزم انجام محاسباتی بیشتر از روش های متداول است ولی در شرایطی که تعیین طول ترک مشکل است، بکارگیری این روش می تواند تنها راه محاسبه انرژی شکست باشد. علاوه بر آن این روش را می توان جهت بررسی اطلاعات آزمایش و حصول اطمینان از دقت اطلاعات نیز بکار برد.

تشکر و قدردانی

این تحقیق بخشی از یک پروژه تحقیقاتی در دانشگاه تهران است. لذا بدین وسیله از حوزه معاونت پژوهشی دانشگاه پیش گفته و همچنین از معاونت محترم پژوهشی دانشکده فنی جهت ایجاد زمینه لازم برای انجام این تحقیق تشکر و قدردانی میشود.

مراجع

- 1 - Martin, R. H. and Jackson, W. C. (1993). "Damage prediction in cross-plyed curved composite laminates." *Composite Materials: Fatigue & Fracture, Fourth Volume, ASTM STP 1156*, W.W. Stinchcomb and N.E. Ashbaugh, Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, PP. 105-126.
- 2 - Sih, C. G. (1984). "Analysis of defects and damage in composites." *Advances in Fracture Research, Vol. 1, Proceeding of the 6th International Conference on Fracture (ICF6)*, New Delhi, India, Pergamon Press, PP. 525-548.
- 3 - Garg, A. C. (1988). "Delamination - a damage mode in composite structures." *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 29, No. 5, PP. 557-584.
- 4 - Kim, R.Y. and Soni, S. R. (1984). "Experimental and analytical studies on the onset of delamination in laminated composites." *Journal of Composite Materials*, Vol. 18, PP. 70-80.
- 5 - Murri, G. B. and Guynn, E. G. (1988). "Analysis of delamination growth from matrix cracks in lamnates subjected to bendong loads." *Composite Materials: Testing and Design, ASTM STP 972*, J.D. Stinchcomb Ed., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, PP. 322-339.

۶ - عزیزاده رشدی، ع. "بررسی رشد ترک بین لایه ای در ماده مرکب یک جهته Epoxy/Glass و اندازه گیری G_{Ic} بروش

تجربی." پایان نامه کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی دانشگاه تهران، (۱۳۷۷).

- 7 - *Standard test method for tensile properties of fiber-resin composites. D3039, Annual Book of ASTM Standards, American Society for Testing and materials.*
- 8 - *Standard guide for testing in-plane shear properties of composite laminates. D4255, Annual Book of ASTM Standards, American Society for Testing and materials.*
- 9 - *Standard test method for apparent interlaminar shear strength of parallel fiber composites by short beam method. D2344, Annual Book of ASTM Standards, American Society for Testing and materials.*
- 10 - *Standard practice for inplane shear stress-strain response of unidirectional reinforced plastics. D3518, Annual Book of ASTM Standards, American Society for Testing and materials.*
- 11 - *Standard test method for mode-I interlaminar fracture toughness of unidirectional fiber-reinforced polymer matrix composites. D5528-94a, Annual Book of ASTM Standards, American Society for Testing and materials.*
- 12 - Javidrad, F. and Mosavi mashadi, M. (1999). "A finite element investigation into the effect of a skew insert in DCB specimen on calculating mode-I delamination fracture energy of unidirectional composites." *Submitted to Journal of Testing and Evaluation, ASTM, 2000.*
- ۱۳ - جاویدراد، ف. و موسوی مشهدی، م. بررسی اثر کجی پیش ترک در تعیین انرژی شکست مود ۱ در مواد مرکب تک جهته. نشریه دانشکده فنی، دانشگاه تهران، جلد ۳۲، شماره ۱، خرداد (۱۳۷۸).
- 14 - Hashemi, S., Kinloch, A. J. and Williams, G. J. (1990). "The effects of geometry, rate and temperature on the mode I, mode II and mixed mode I/II interlaminar fracture on (carbon-fibre/poly (ether ether ketone) composite." *Journal of Composite Materials, Vol. 24, PP. 918-956.*
- 15 - Hitchings, D., Robinson, P. and Javidrad, F. (1996). "A finite element model for delamination propagation in composites." *Computers & Structures, Vol. 60, No. 6, PP.1093-1104.*
- 16 - Robinson, P., Javidrad, F. and Hitchings, D. (1995). "Finite element modelling of delamination growth in the DCB and edge delaminated DCB specimens." *Composite Structures. Vol. 32, PP. 275-285.*
- 17 - Javidrad, F. (2000). "Experimental and numerical study of delamination growth induced by a transverse crack in unidirectional laminates subjected to bending loads." *Journal of Testing and Evaluation, ASTM, Vol. 28, No. 1. PP. 12-21.*
- ۱۸ - جاویدراد، ف. "ارزیابی روش بسته شدن مجازی ترک برای تعیین میزان رهایی انرژی کرنشی در ترک های بین لایه ای در مواد مرکب." مجموعه مقالات اولین کنفرانس سراسری هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران (۱۳۷۵).
- 19 - Javidrad, F. (1993). "A finite element model for delamination propagation in laminated composite plates." *Transfer Report, Department of Aeronautics, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, UK.*
- 20 - Robinson, P. and Song, D. Q. (1992). "A modified DCB specimen for mode-I testing of multidirectional laminates." *Journal of Composite Materials, Vol. 26, PP. 1554-1577.*
- 21 - Davidson, B. D. and Schapery, R. A. (1990). "A technique for predicting mode-I energy release rates using a first order shear deformable plate theory." *Engineering Fracture Mechanics, Vol. 36, PP. 157-165.*
- 22 - Williams, J. G. (1989). "Fracture mechanics of anisotropic materials, chapter 1." *Application of Fracture Mechanics to Composite Materials, Edited by K. Friedrich, Elsevier Science Publishers B.V.*
- 23 - Murri, G. B. and Martin, R. H. (1993). "Effect of initial delamination on mode-I and mode-II interlaminar fracture toughnesses and fatigue fracture threshold." *Composite Materials: Fatigue and Fracture, Fourth*

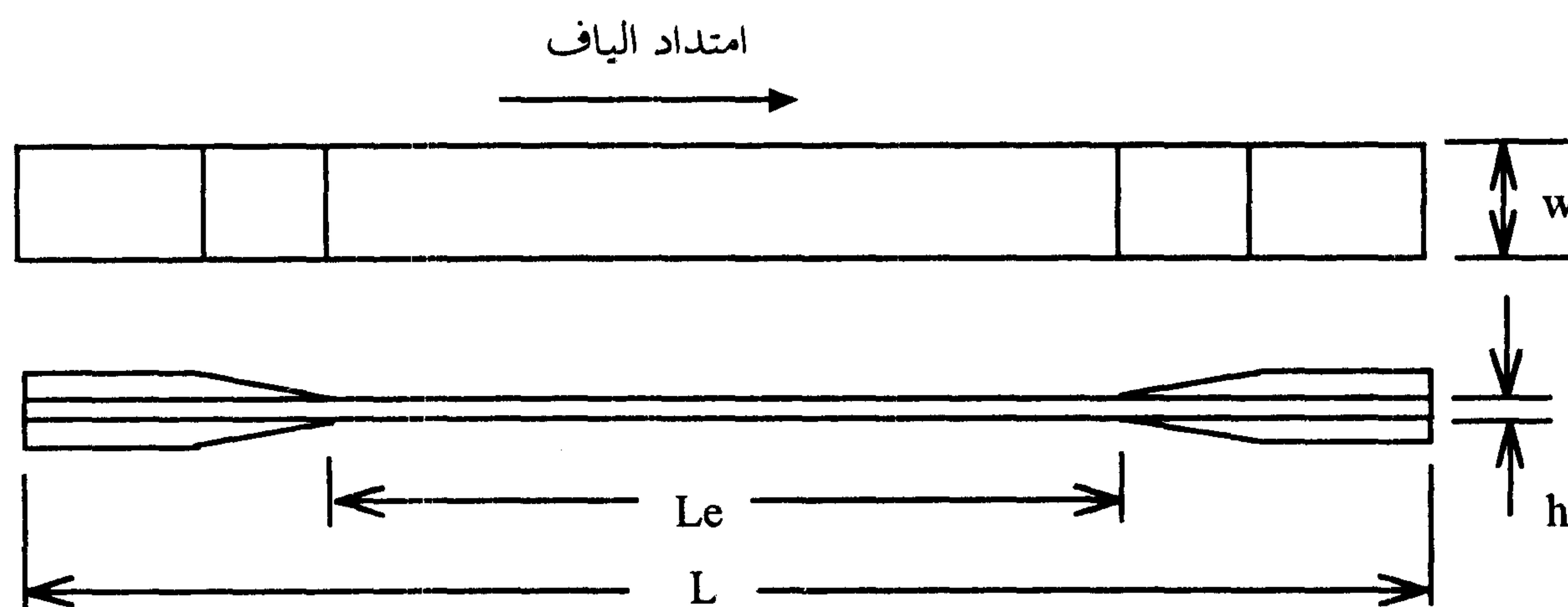
- Volume, ASTM STP 1156, W.W. Stinchcomb and N.E Philadelphia, PA, PP. 239-256.*
- 24 - Todo, M. and Jar, P.-Y. B. (1998). "Study of mode-I interlaminar crack growth in DCB specimens of fibre-reinforced composites." *Composite Science and Technology*, Vol. 58, PP. 105-118.
- 25 - Sun, C.T. and Zheng, S. (1996). "Delamination characteristics of double-cantilever beam and end-notched flexure composite specimens." *Composite Science and Technolgy*, Vol. 56, PP. 451-459.
- 26 - Davidson, B. D. and Schapery, R. A. (1988). "Effect of finite width on deflection and energy release rates of an orthotropic double cantilever specimens." *Journal of Composite Materials*, Vol. 22, PP. 460-656.
- 27 - Williams, J. G. (1987). "Large displacement and end block effects in the Dcb interlaminar tests in modes I and II." *Journal of Composites Materials*, PP. 330-348.

ضمیمه ۱

استاندارد ASTM به شماره مشخصه D3039M-93 [Y] می باشند. جزئیات اندازه های نمونه ها نیز در جدول (ض-۱) داده شده اند.

نتایج آزمایشهای کشش نمونه های تک جهت

شکل و ابعاد هندسی نمونه های استفاده شده در شکل (ض-۱) داده شده است. ابعاد کلی نمونه ها کاملاً بر اساس



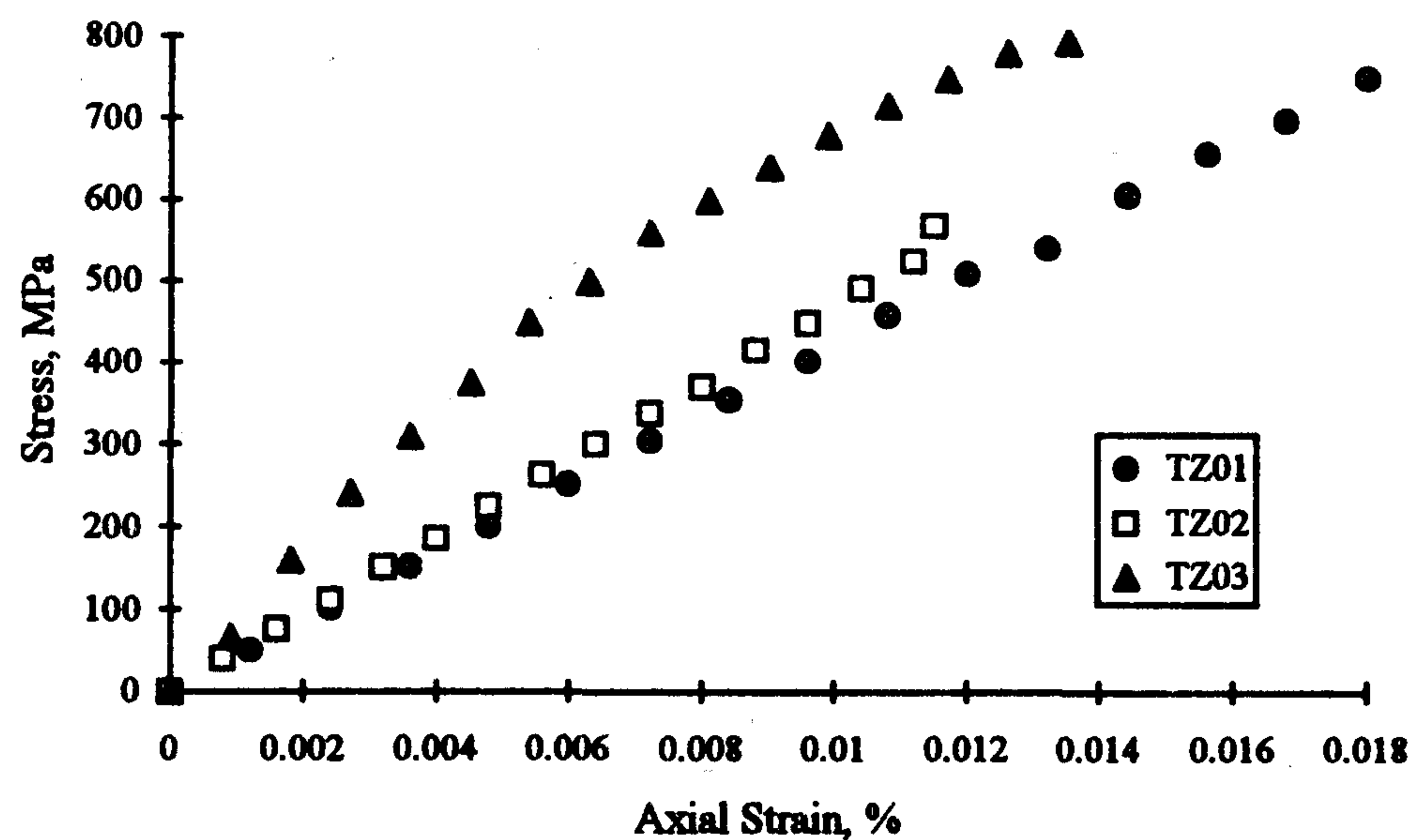
شکل ض-۱: هندسه نمونه های آزمایش کشش.

جدول ض-۱: اطلاعات آزمایشات کشش نمونه های صفر درجه.

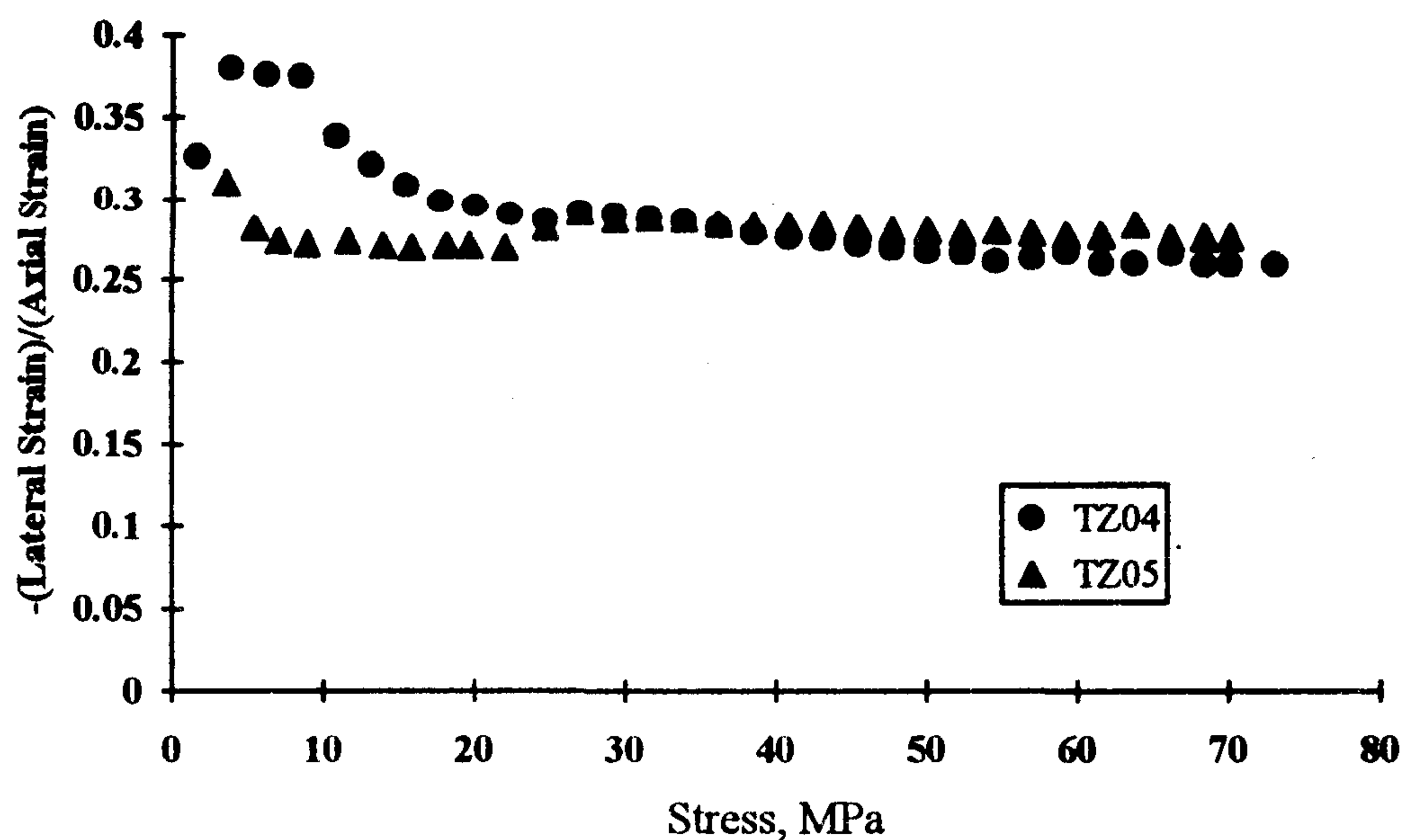
شماره نمونه	-	TZ01	TZ02	TZ03	TZ04	TZ05
مینیمم پهنا در سه نقطه	W_i (mm)	۱۴/۷	۱۴/۸	۱۴/۸	۱۴/۸	۱۴/۵
مینیمم ضخامت در سه نقطه	h_i (mm)	۱/۸	۱/۸	۱/۸	۱/۸	۱/۸
مینیمم سطح مقطع در سه نقطه	A_i (mm ²)	۲۶/۴۶	۲۶/۶۴	۲۶/۶۴	۲۶/۶۴	۲۶/۵۵
طول کل	L (mm)	۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰
طول موثر	L_e (mm)	۱۳۸	۱۳۸	۱۳۸	۱۳۸	۱۳۸
وزن	W (gr)	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸
دمای آزمایش	T (°C)	۲۴	۲۶	۲۴	۲۷	۲۴
بار نهایی	F_{ut} (MPa)	۷۵۴/۶	-	۷۹۰	-	-
سرعت آزمایش	V (mm/min)	۱	۱	۱	۰/۱	۰/۱

این کرنش سنج ها روی سطح نمونه در وسط و متقارن نسبت به ابعاد نصب شده و کرنش های جانبی را اندازه گیری می نماید. از این آزمایشهای کشش، ضریب ارتجاعی در جهت الیاف E_{11} و ضریب پواسون اصلی نمونه قابل محاسبه خواهد بود. نتایج آزمایشات در اشکال (ض-۲) و (ض-۳) داده شده است.

سه نمونه TZ01، TZ02 و TZ03 برای آزمایش کشش استفاده شده است که در آنها بارگذاری تا مرحله شکست و یا نزدیک به شکست پیش رفته است. دو نمونه دیگر برای تعیین ضریب پواسون اصلی ماده (ν_{12}) مورد استفاده قرار گرفته است. در این دو نمونه از کرنش سنج برای تعیین کرنش های جانبی در هنگام بارگذاری استفاده شده است.



شکل ض-۲: تغییرات تنش - کرنش در نمونه های صفر درجه.



شکل ض-۳: تغییرات نسبت کرنش جانبی به کرنش محوری برحسب تنش محوری (بارگذاری در جهت الیاف است).

ضمیمه ۲

دارای شکلی همانند نمونه های صفر درجه ولی با ابعاد مختلف می باشند (شکل ض-۱) را ببینید). جزئیات ابعاد نمونه ها در جدول (ض-۲) داده شده است.

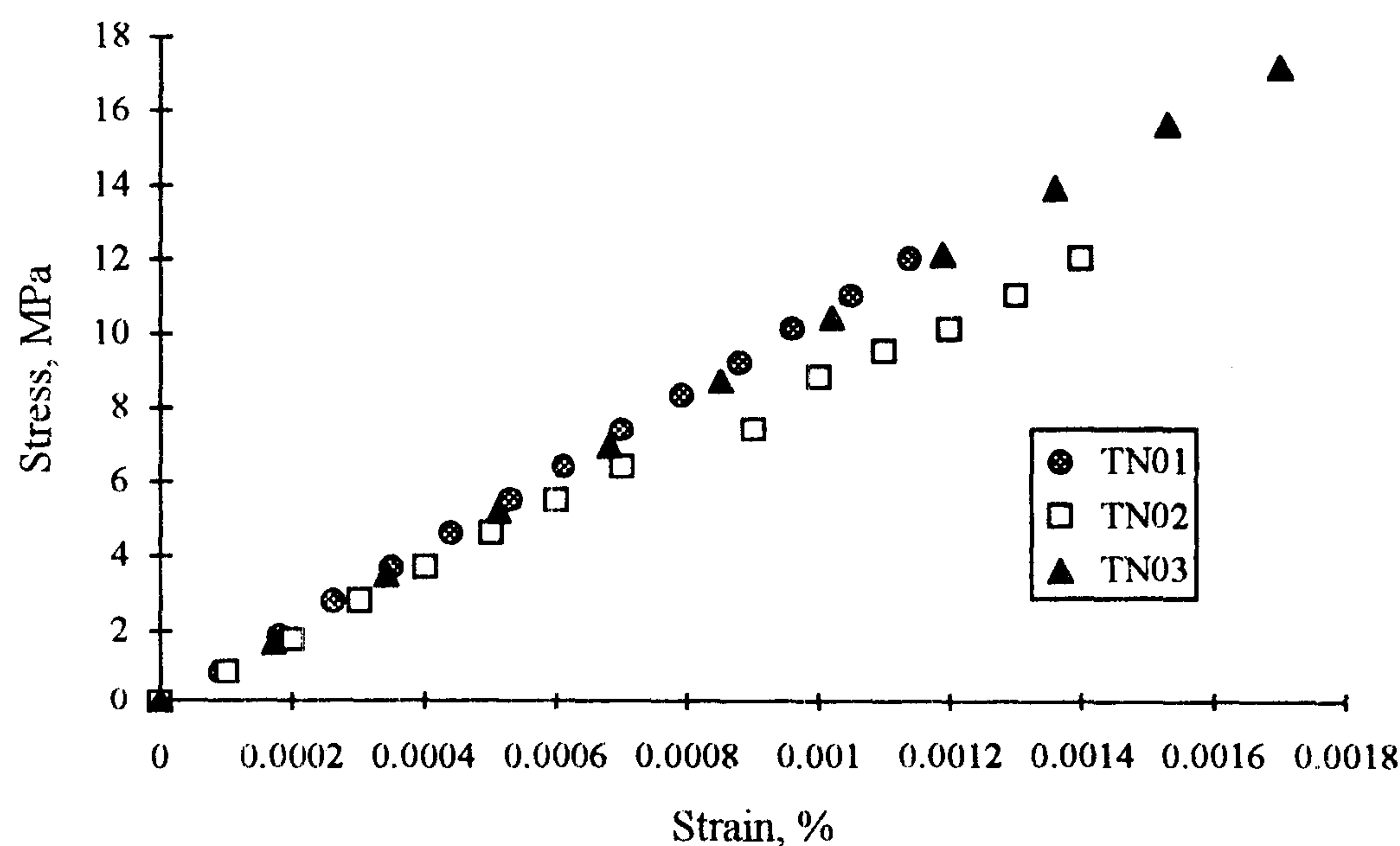
نتایج آزمایشهای کشش نمونه های ۹۰ درجه
سه نمونه با الیاف ۹۰ جهت تعیین ضریب ارتجاعی ماده در جهت عمود بر الیاف تولید شده است. این نمونه ها

جدول ض-۲: اطلاعات آزمایش کشش نمونه های ۹۰ درجه.

شماره نمونه	-	TN01	TN02	TN03
مینیمم پهنا در سه نقطه	W_i (mm)	۱۹	۱۹	۱۹/۵
مینیمم ضخامت در سه نقطه	h_i (mm)	۱/۳	۱/۳	۱/۳
مینیمم سطح مقطع در سه نقطه	A_i (mm ²)	۲۴/۷	۲۴/۷	۲۵/۴
طول کل	L (mm)	۱۵۰	۱۵۰	۱۵۰
طول موثر	L_e (mm)	۷۰	۷۰	۷۰
وزن	W (gr)	۱۴	۱۴	۱۴
دمای آزمایش	T (°C)	۲۴	۲۴	۲۴
بار نهایی	F_{ut} (MPa)	۱۰/۵	۱۰/۵	-
سرعت آزمایش	V (mm/min)	۱	۱	۱

نتایج تنش-کرنش نمونه ها در شکل (ض-۴) داده شده است. همانگونه که مشاهده می شود رفتار نمونه ها تا زمان

شکست خطی بوده و بنابراین با تعیین شیب این نمودارها می توان ضریب ارتجاعی مورد نظر را بدست آورد.



شکل ض-۴: تغییرات تنش-کرنش نمونه های ۹۰ درجه.

ضمیمه ۳

استفاده شده در این کار تحقیقاتی استفاده از نمونه هایی با زاویه الیاف $\pm 45^\circ$ بوده است. بدلیل در دسترس بودن تجهیزات لازم برای این کار، استفاده از این روش در این کار تحقیقاتی ترجیح داده شده است. دو نمونه با زاویه الیاف $\pm 45^\circ$ که بطور متقارن نسبت به صفحه میانی چیده

نتایج آزمایشهای کشش نمونه های $\pm 45^\circ$ درجه

روش های آزمایش برای تعیین منحنی پاسخ های تنش - کرنش برشی مواد مرکب معمولاً پر هزینه و پیچیده بوده و نیاز به وسایل و قید و بندهای مخصوص دارد. روش

تک جهته (شکل (ض-۱)) می باشد. ابعاد نمونه ها و شرایط آزمایش در جدول (ض-۳) داده شده است.

شده اند برای اندازه گیری ضریب ارتجاعی برشی تولید شده است. شکل کلی نمونه ها همانند نمونه های کشش

شکل ض-۳: اطلاعات آزمایشات کشش نمونه های $\pm 45^\circ$.

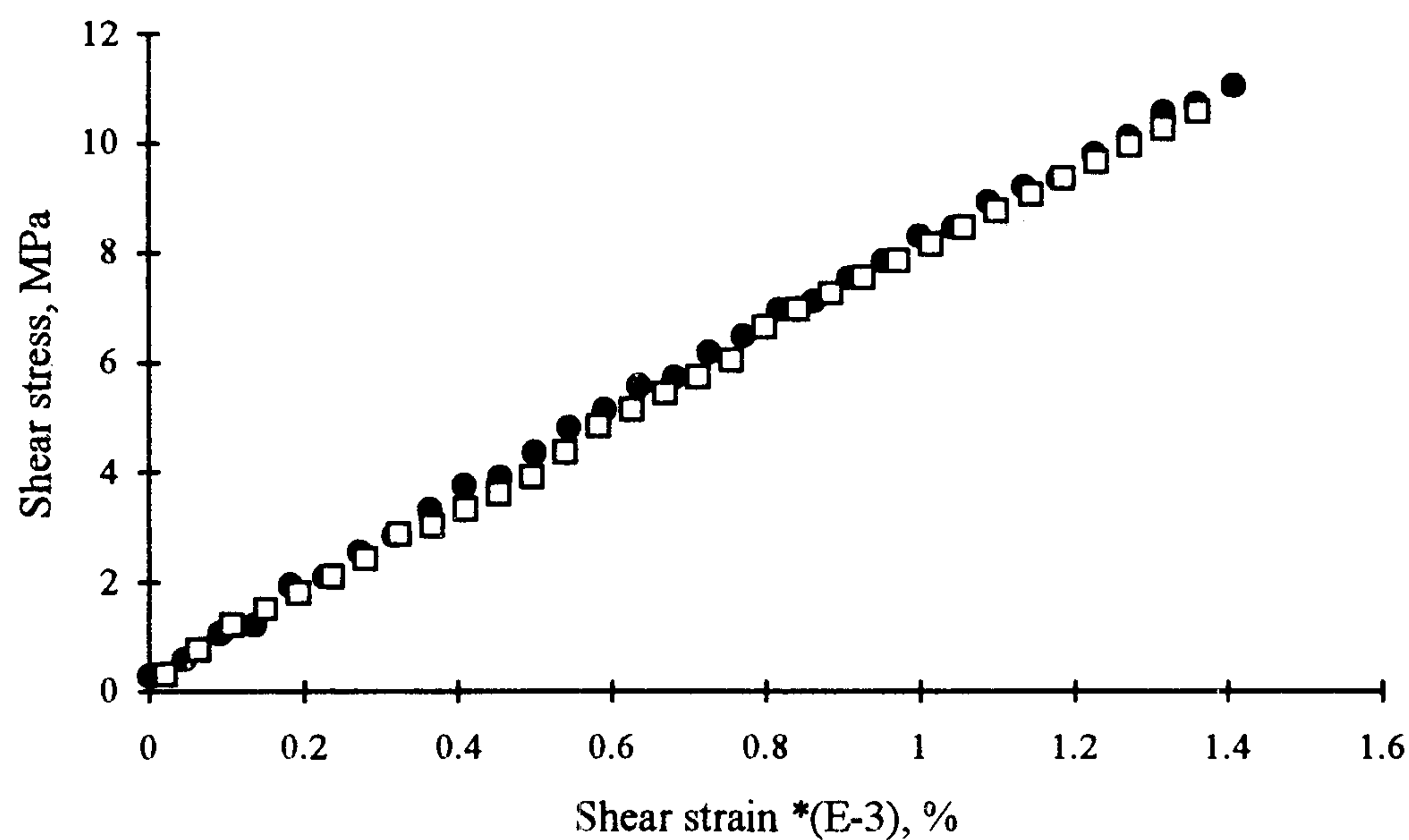
شماره نمونه	-	0	GF02
مینیمم پهنا در سه نقطه	W_i (mm)	۲۵	۲۵
مینیمم ضخامت در سه نقطه	h_i (mm)	۱/۳	۱/۳
مینیمم سطح مقطع در سه نقطه	A_i (mm ²)	۳۲/۵	۳۲/۵
طول کل	L (mm)	۲۵۰	۲۵۰
طول موثر	L_e (mm)	-	-
وزن	W (gr)	۱۶	۱۶
دمای آزمایش	T (°C)	۲۴	۲۴
بار نهایی	F_{ut} (MPa)	-	-
سرعت آزمایش	V (mm/min)	۰/۱	۰/۱

که در آنها τ_{12} تنش برشی و γ_{12} کرنش برشی در دستگاه اصلی لایه ها، b عرض نمونه و h ضخامت است. اکنون با محاسبه شیب تغییرات تنش برشی برحسب کرنش برشی می توان ضریب ارتجاعی برشی G_{12} را بدست آورد. شکل (ض-۵) تغییرات تنش برشی برحسب کرنش برشی را برای دو نمونه آزمایش نشان می دهد. مشاهده می شود که نمودارها با تقریب خوبی خطی بوده و هر دو نمونه نیز پاسخی مشابه یکدیگر دارند.

دو کرنش سنج بطور متعامد در وسط نمونه قرار داده شده تا بتوان توسط آنها کرنش های طولی (ϵ_x) و کرنش های جانبی (ϵ_y) را اندازه گیری نمود. اگر بار اعمال شده P_x باشد می توان تنش ها و کرنش های برشی را بصورت زیر نوشت:

$$\tau_{12} = \frac{P_x}{2b.h} \quad (\text{ض-۱})$$

$$\gamma_{12} = \epsilon_x - \epsilon_y \quad (\text{ض-۲})$$



شکل ض-۵: تغییرات تنش برشی برحسب کرنش برشی.