بررسی پارامترهای اندازه گیر آسیب پذیری در گرافها

دارا معظمی

استادیار گروه علوم مهندسی دانشکده فنی - دانشگاه تهران

و

مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات سازمان انرژی اتمی ایران

(تاریخ دریافت ۷۷/۲/۸، تاریخ تصویب ۷۸/۲/۲۵)

چکیده

تجزیه و تحلیل آسیب پذیری درگرافها به سوالاتی درباره چگونگی همبندی گرافها منجر می شود. اگر گراف را به صورت یک شبکه درنظر بگیریم زمانی که ایستگاههایی از کار می افتند، آسیب پذیری مقاومت یک شبکه را در برابر از همپاشیدگی آن، اندازه می گیرد. پارامترهای نظری بسیاری مورد استفاده قرار گرفته اند تا آسیب پذیری را در شبکه های ارتباطی نشان دهند. بعضی از اینها با دو سئوال اصلی درباره گرافی که در نهایت به دست می آید، مواجهند:

(الف) چند ایستگاه هنوز با یکدیگر ارتباط دارند؟

(ب) مشکلات وصل مجدد شبکه آسیب دیده تا چه اندازه است؟

دراین مقاله ابتدا برخی از پارامترهای مهم آسیب پذیری در گرافها را تعریف کرده و چند قضیه جدید درباره پارامتر همبستگی را ثابت می کنیم. این قضیه ها رابطه بین پارامتر همبستگی و دیگر پارامترها را نشان می دهند.

کلید واژه ها : همبندی ، محکمی ، همبستگی، بستگی ، بی نقصی

مقدمه

آسیب پذیری یک شبکه ارتباطی ترکیبی از بررسی گره ها و پیوندهای ارتباطی است که برای طراحان شبکه بسیار مهم است. وقتی شبکه أی شروع به از دست دادن پیوندها یا گره ها می کند موثر بودن خود را از دست می دهد. طبیعتاً گره های جدید یا پیوندهایی اضافه می شوند تا شبکه تعمیر شود. این کوششی است برای این که شبکه ، موثر بودن خود را به دست آورد. لذا شبکه های ارتباطی باید، نه تنها نسبت به از همپاشیدگی اولیه بلکه نسبت به احتمال تعمیر مجدد شبکه، تا حد امکان پایدار ساخته شوند.

چنین شبکه أی را می توان به وسیله یک گراف، G ، با مجموعه راسی $V(G)$ و مجموعه یالی $E(G)$ ، نمایش داد. پارامترهای نظری بسیاری مورد استفاده قرار گرفته اند تا آسیب پذیری شبکه های ارتباطی را نشان دهند. در این میان، پارامتری به نام همبندی بسیار مورد استفاده قرار گرفته است. مشکلی که با این پارامتر داریم آن است که نمی تواند نشان دهد که شبکه ناهمبند در چه وضعیتی است. یعنی دو گراف با یک تعداد راس و همبندی یکسان ممکن است بعد از این که مجموعه برش راسی مینیمم را از آنها بر داریم، نتایج کاملاً متفاوتی را به دست دهند. یکی ممکن است کاملاً متلاشی شود در حالی که دیگری شامل چند مولفه بسیار پایدار شود، و لذا تعمیر آن بسیار آسانترشود. در نتیجه ، پارامترهای متعدد دیگری که معروفترین آنها بستگی، محکمی و بی نقصی هستند، معرفی شدند تا این مشکل را به ترتیبی حل کنند.

تعریفها

گراف G یک سه تایی مرتب (V(G), E(G), ψ(G))، متشکل از مجموعه ناتهی V(G)ی راسها، مجموعه E(G) ی یالها، مجزا از V(G)، و تابع وقوع ψ(G) است که با هریال G یک جفت نامرتب (نه لزوما" مجزا) از راسهای G را همراه می کند. اگر e یک یال و u و v راسهایی باشند، به قسمی که $\psi_G(e)=uv$، آن گاه می گویند e، u را به v وصل می کند، راسهای u و v را دو انتهای e می نامند. فرض کنید A زیرمجموعه أی از V(G) است. همسایه A، N(A)، شامل همه راسهای G است که مجاور به حداقل یک راس A باشند. مسیر P در یک گراف G دنباله متناهی $v_0e_1v_1e_2v_2.....e_kv_k$ است که در آن v_iها راسها و e_iها یالها و راسها مجزا و دو انتهای e_i، v_{i-1} و v_i هستند. گراف G همبند است اگر هر دو راس در G به وسیله مسیری به یکدیگر متصل شوند. اگر راسهای u و v در G همبند باشند، فاصله بین u و v در G طول کوتاهترین مسیر (u,v) در G است. گراف G مفروض است، در گراف G^2 ، $V(G^2)=V(G)$ و $uv \in E(G^2)$ اگر و تنها اگر $uv \in E(G)$ یا فاصله از u به v برابر ۲ باشد. مجموعه أی از راسها در G مستقل است اگر هیچ دو راسی از آنها مجاور نباشند. بیشترین تعداد راسها در چنین مجموعه أی را عدد استقلال راسی G می نامندو به وسیله $\alpha(G)$ یا α نمایش می دهند. فرض کنید که V زیر مجموعه ناتهی V باشد. زیر مجموعه G را که مجموعه راسهایش V' است و مجموعه یالهایش مجموعه أی از آن یالهای G است که هردو انتهایشان در V' است، زیرگراف G القا شده به وسیله V' می نامند و به وسیله $G[V']$ نشان می دهند؛ می گوییم که $G[V']$ یک زیر گراف القایی G است. گراف یالی گراف G ، گرافی است با مجموعه راسهای E(G) که در آن دو راس به هم متصل می شوند اگر و تنها اگر یالهای مجاور در G باشند. گراف دو بخشی گرافی است که مجموعه راسها را بتوان به دو زیر مجموع X و Y به طوری افراز کرد که هر یال دارای یک انتها در X و یک انتها در Y باشد. چنین افراز (X,Y)را دوبخشی کردن گراف می نامند. گراف دوبخشی کامل، یک دوبخشی ساده با افراز (X,Y) است که در آن هر راس X به هر راس Y متصل است. اگر $|X|=m$ و $|Y|=n$ ، چنین گرافی را به وسیله $K_{m,n}$ نشان می دهند. گراف ساده أی را که در آن هرجفت از راسهای متمایز به وسیله یک یال به هم متصل باشند، گراف کامل می نامند. گراف کامل n راسی را با K_n نشان می دهند. زیر مجموعه أی از V(G) را مجموعه برشی نامند اگر حذف آنها G را ناهمبند کند، و زیر مجموعه أی از E(G) را یک مجموعه برش یالی نامند اگر حذف آنها G را ناهمبند کند.

در بخش فوق سعی شده همه تعاریف موردنیاز برای مطالعه این مقاله آورده شود، باوجود این و در صورت نیاز خواننده می تواند به کتابهای اصلی نظریه گراف و از آن جمله کتاب نظریه گراف و کاربردهای آن اثر باندی و مورتی [۳] مراجعه کند.

گذری بر پارامترهای اندازه گیر آسیب پذیری در گرافها

فرض کنید G گرافی با مجموعه راسی V و تعداد اعضای n ، و مجموعه یالی E با تعداد اعضای e است. فرض کنید A زیرمجموعه أی از V با تعداد اعضای |A| است. G-A را این طور تعریف می کنیم که گرافی القا شده به وسیله راسهای V-A است، $\tau(G)$ تعداد راسها در بزرگترین مولفه گراف القا شده، به وسیله G-A است و ω (G) تعداد مولفه هاست.

چون ابتدا به حالتی علاقه مندیم که از همپاشیدگی گراف به علت حذف یک راس یا مجموعه أی از راسهاست (و در نتیجه ، حذف همه یالهایی که راسهای حذف شده بر آنها واقع اند)، بحث خود را به پارامترهای آسیب پذیری راسی محدود می کنیم. باوجود این هرجا لازم دیدیم از پارامترهای آسیب پذیری یالی هم صحبت خواهیم کرد.

دو پارامتر اولیه زیر اطلاعاتی را به دست می دهند که چطورگراف G می تواند به سهولت با حذف مجموعه خاصی از راسها متلاشی شود.

در گراف متناهی ساده و همبند G ، همبندی راسی، $\kappa=\kappa(G)$ ، مینیمم تعداد راسهایی است که حذف آنها

گراف G را به گراف ناهمبند یا به گراف نابدیهی K_1 تبدیل کند [۸،۷] . اگر $\kappa \geq n$ ، گراف G را n – همبند نامند. به طور مشابه، در گراف متناهی ساده و همبند G همبندی یالی، $\lambda = \lambda(G)$ ، مینیمم تعداد یالهایی است که حذف آنها گراف G را به گراف ناهمبند یا گراف بدیهی K_1 تبدیل کند [۸،۷] . گراف G را n - یال همبند نامند اگر $\lambda(G) \geq n$ باشد.

بستگی یک گراف G به وسیله ودال [۱۵] به صورت زیر تعریف شد:

$$bind(G) = \min\{\frac{|N(A)|}{|A|}\}$$

که در آن $\phi \neq A \subseteq V(G)$ و $N(A) \neq V(G)$. در [۱۶و۱۷] بستگی را نقطه ذوب گراف نامیده اند. دلیل نامگذاری "بستگی " این بود که اگر بستگی بزرگ شود، آن گاه راسهای G به طور محکمی به یکدیگر متصل می شوند، یعنی G دارای یالهای بسیاری است که به صورتی مناسب توزیع شده اند.

مفهوم بی نقصی گراف G در [۱و۲] به عنوان یک اندازه گیری مفید آسیب پذیری گراف G معرفی شد. بی نقصی راسی گراف G به صورت زیر تعریف می شود:

$$I(G) = \min\{|A| + \tau(G - A)\}$$

که در آن مینیمم برای همه $A \subseteq V(G)$ به دست می آید و $\tau(G-A)$ ماکسیمم مرتبه یک مولفه G-A است.

محکمی گراف G به وسیله خواتل در [۴] معرفی شد. او رابطه میان این پارامتر و وجود دورهای همیلتن را در گراف مشاهده کرد و نتایج متعددی را با بکارگیری این پارامتر جدید به دست آورد. تعریف محکمی چنین است : گراف همبند G را t – محکم نامند هرگاه برای $A \subseteq V(G)$ با $\omega(G-A) > 1$ داشته باشیم $t\omega(G-A) \leq |A|$. در این رابطه مراجع [۴و۹و۱۰و۱۴] را به بینید. اگر G کامل نباشد، آن گاه بزرگترین t موجود است به طوری که G ، t – محکم است، این عدد محکمی G است و به وسیله t(G) نشان داده می شود. لذا

$$t(G) = \min\{\frac{|A|}{\omega(G-A)}\}$$

که در آن A مجموعه برشی G است. چون گراف کامل دارای مجموعه برشی نیست، برای هر $n \geq 1$ قرار می دهیم $t(K_n) = \infty$. مجموعه $A \subseteq V(G)$ را t – مجموعه نامند اگر $t(G) = \frac{|A|}{\omega(G-A)}$.

در [۲]، بیرفوت، اینترینگر و سوارت، پارامترهای همبندی، بی نقصی، بستگی و محکمی را برای رده های متعددی از گرافها با یکدیگر مقایسه کردند.

همبستگی یک گراف و رابطه آن با دیگر پارامترها

همبستگی، یک پارامتر جدید برای گرافهاست که تلفیقی از پارامترهای محکمی و بی نقصی است. همبستگی اولین بار در مقالات [۵و۶] معرفی شد و سپس در مقاله های [۱۲و۱۳] تعمیم داده شد. همبستگی یک گراف G یعنی T(G) به صورت زیر تعریف می شود:

$$T(G) = \min\{\frac{|A| + \tau(G-A)}{\omega(G-A)}\}$$

که در آن مینیمم نسبت به همه راسهای مجموعه برشی A از G اختیار می شود. G-A را گراف القا شده به وسیله راسهای V-A و τ(G-A) را تعداد راسها در بزرگترین مولفه گراف القا شده به وسیله G-A تعریف می کنیم. $\omega(G-A)$ تعداد مولفه های G-A است. گراف همبند G را T – همبسته نامند اگر به ازای هر زیر مجموعه A از راسهای G با $\omega(G-A) > 1$ رابطه زیر

$$|A| + \tau(G-A) \geq T\omega(G-A)$$

برقرار باشد. اگر G کامل نباشد، آن گاه بزرگترین T موجود است به طوری که G، T – همبسته است. این T، همبستگی G است. به سخنی دیگر، گراف کامل شامل مجموعه برش راسی نیست و لذا به ازای هر T، T – همبسته است. به طور متناظر، تعریف می کنیم $T(K_p) = \infty$ به ازای هر p، $(p \geq 1)$. مجموعه $A \subseteq V(G)$ را T – مجموعه G نامند اگر

$$T(G) = \frac{|A| + \tau(G-A)}{\omega(G-A)}$$

در این مقاله سعی خواهیم کرد ارتباط بین همبستگی و پارامترهای دیگر را نشان دهیم. لم ۱ ارتباط بین پارامتر همبستگی و پارامتر همبندی را نشان می دهد.

لم ۱: برای هر گراف G ، که $T(G) \ge \frac{\kappa(G)+1}{\alpha(G)}$ در آن $\alpha(G)$ عدد استقلال G است.

برهان : برای هر مجموعه برشی A از G ، می دانیم که $|A| \ge \kappa(G)$. لذا $|A|+\tau(G-A) \ge \kappa(G)$. همچنین می توان دید که تعداد مولفه های G-A حداکثر برابر $\alpha(G)$ است.

در لم ۲ با نشان دادن رابطه بین پارامتر همبستگی و عدد استقلال ، کران بالای مناسبی را نیز ارائه می دهیم.

لم ۲: اگر G کامل نباشد، آن گاه $T(G) \le \frac{n-\alpha(G)+1}{\alpha(G)}$.

برهان : فرض کنید X بزرگترین مجموعه مستقل از راسها در G است. A را به صورت A = V(G) - X تعریف می کنیم. در این صورت $|A| = n-\alpha(G)$ ، $\tau(G-A)=1$ و $\omega(G-A)=\alpha(G)$. پس نتیجه مطلوب به دست می آید.

برای این که ببینیم پارامتر همبستگی چگونه کار می کند، گراف دو بخشی کامل را انتخاب کرده و همبستگی آن را محاسبه می کنیم.

لم ۳: اگر $m \le n$ آن گاه $T(K_{m,n}) = \frac{m+1}{n}$.

برهان : اگر $G=K_{m,n}$ ، با $m\le n$ آن گاه $\kappa(G)=m$ و $\alpha(G)=n$. با ترکیب لم ۱ و ۲ داریم $\frac{\kappa(G)+1}{\alpha(G)} \le T \le \frac{m+n-\alpha(G)+1}{\alpha(G)}$. پس $T=\frac{m+1}{n}$.

بدون اینکه کوشش کنیم بهترین نتیجه ممکن را بیابیم، می توانیم رابطه زیر را میان T(G) و t(G) ثابت کنیم.

قضیه ۱: برای هر گراف G ، $T(G) \ge t(G) + \frac{1}{\alpha(G)}$.

برهان : فرض کنید $A\subseteq V(G)$ یک مجموعه t – مجموعه و $B\subseteq G$ یک T – مجموعه باشند. در این صورت

$$\frac{|B|+\tau(G-B)}{\omega(G-B)} \ge \frac{|B|}{\omega(G-B)} + \frac{1}{\omega(G-B)} \ge \frac{|A|}{\omega(G-B)} + \frac{1}{\alpha(G)}$$

فرع زیر نتیجه مستقیم قضیه ۱ است.

فرع ۱: فرض کنید G گراف ناتهی بوده و m بزرگترین عدد صحیحی باشد به طوری که $K_{1,m}$ یک زیرگراف القایی G است. در این صورت $T(G) \ge \frac{\kappa(G)}{m} + \frac{1}{\alpha(G)}$.

برهان : در مرجع [۱۰] گودارد و سوارت ثابت کردند که تحت این شرایط $t(G) \ge \frac{\kappa(G)}{m}$.

لم ۱ رابطه أی بین T (G) و همبندی G را نشان می دهد. رابطه دیگر در زیر آمده است.

قضیه ۲: برای هر گراف G، $T(G^2) > \kappa(G)$.

برهان : فرض کنید G گرافی با همبندی κ بوده و گیریم A مجموعه برشی در G^2 است. فرض کنید $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_m$ مولفه های $G^2 - A$ هستند. برای هر راس $u\in A$ و هر i = 1,2,...m ، u را عضو A_i در نظر می گیریم اگر و تنها اگر راس $v\in V_i$ مجاور به u در G موجود باشد. به وضوح ، هر A_i یک مجوعه برشی G است (آن V_i را از بقیه G جدا می کند). از این رو برای هر i = 1,2,...m، داریم $|A_i| \ge \kappa$. هرچند هر $u\in A$ حداکثر متعلق به یک A_i است. در غیراین صورت راسهای $v_i\in V_i$ و $v_j \in V_j$ با $i\ne j$ موجودند به طوری که u در G به هر دو v_i و v_j مجاور است. در نتیجه، راسهای v_i و v_j در G^2 مجاور خواهند بود، که متناقض با این است که آنها متعلق به مولفه های مجزای G^2-A هستند. لذا برای $i\ne j$ داریم $A_i\cap A_j=\phi$. با ترکیب دو رابطه فوق داریم: $|A| \ge \sum_{i=1}^{m}|A_i| \ge \kappa m = \kappa\omega(G^2-A)$. چون A مجموعه دلخواه است $\omega(G^2-A)>1$ و $|A|+\tau(G^2-A) \ge \kappa\omega(G^2-A)$ ، لذا G^2 ، κ – همبسته است که همان نتیجه مطلوب است.

قضیه زیر رابطه مناسبی را میان بستگی و همبستگی بر قرار می کند.

قضیه ۳ : برای هر گراف G، $T(G) \ge bind(G) - 1$.

برهان : فرض کنید $bind(G)=c$. اگر c<1 ، آن گاه c – 1 < 0 و نتیجه به دست می آید، زیرا T(G) نامنفی است. $c\ge 1$ را درنظر بگیرید. فرض کنید که به ازای $A\subseteq V(G)$ ، $\omega=\omega(G-A)\ge 2$. می خواهیم ثابت کنیم که $\frac{|A|+1}{\omega} > c-1$. اگر هریک از ω مولفه G - A

دارای حداقل دو راس باشند، گیریم S شامل راسهایی در همه مولفه ها بجز کوچکترین آن است، بطوری که

$$|S| \ge \frac{|V(G)-A|(\omega-1)}{\omega} \ge \frac{2\omega(\omega-1)}{\omega} = 2(\omega-1) \ge \omega$$

اگر از طرفی $V(G)-A$ شامل یک راس متمایز باشد، گیریم $S=V(G)-A$. لذا $|S|=|V(G)-A|\ge\omega$. در هر دو حالت $N(S)\neq V(G)$ ، و چون $bind(G)=c\ge 1$ ، داریم :

$$|S|+|A|+1>|S|+|A|\ge|N(S)|\ge c|S|$$

نتیجه این که $|A|+1>(c-1)|S|\ge(c-1)\omega$. بنابراین $\frac{|A|+1}{\omega}>c-1$ ، لذا $T>c-1$.

قضیه ۴ : فرض کنید G گرافی با $0<T(G)<\infty$ و $\lambda(G)=\lambda$. اگر گراف یالی را به وسیله L(G) نمایش دهیم آنگاه $T(L(G))>\frac{\lambda}{2}$.

برهان: در [۱۴] پیپرت نشان داد که ، $t(L(G))\ge\frac{\lambda}{2}$. پس با ترکیب این نتیجه با قضیه ۱ داریم $T(L(G))>\frac{\lambda}{2}$.

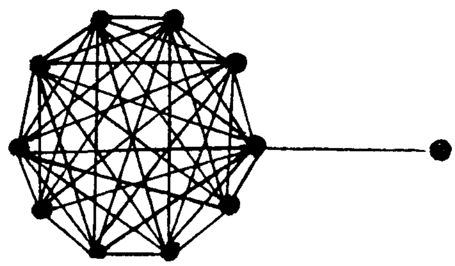
قضیه ۵ : اگر G همبند و ناکامل بوده اما شامل زیر گراف $K_{1,3}$ نباشد، آن گاه $T(G)>\frac{\kappa(G)}{2}$.

برهان : فرض کنید G گرافی ناکامل با همبندی $\kappa(G)$ است که شامل زیر گراف $K_{1,3}$ نیست. فرض کنید A ، T − مجموعه بوده و گیریم $W_1,W_2,...W_m$ مولفه های G − A باشند.

چون G دارای همبندی $\kappa(G)$ است، $\kappa(G)$-همبند بوده و لذا $\kappa(G)$ مسیر مجزای داخلی از $u_i\in W_i$ به $u_j\in W_j$ برای همه $1\le i$ و $j\le m$ با $i\neq j$ وجود دارند. هریک از این مسیرها باید شامل یک راس A باشد. در این صورت برای هر i حداقل $\kappa(G)$ یال موجود است که از W_i به راسهای مجزای A وارد می شوند. لذا در مجموع حداقل $m\kappa(G)$ یال از G − A به A وجود دارند، یعنی حد اکثر یک یال از هر مولفه W_i به راس خاصی از A .

فرض کنید $v\in A$ مجاور به راسهای u_1,u_2 و u_3 در مولفه های متمایز G − A است. در این صورت ، چون $\{u_1,u_2,u_3\}$ یک مجموعه مستقل است، گراف القا شده به وسیله $\{v,u_1,u_2,u_3\}$ یک $K_{1,3}$ است که یک تناقض است.

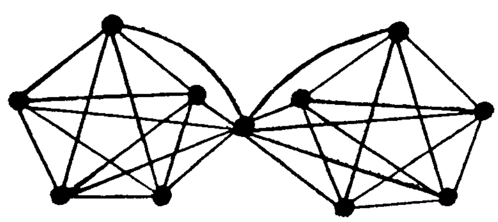
از این رو می توانیم نتیجه بگیریم که هر راس A مجاور به حداکثر دو مولفه G − A است. لذا حداکثر |A| ۲ یال از G − A به راسهای A وارد می شوند، یعنی حداکثر یک یال از هر مولفه به راس خاصی از A . پس $m\kappa(G)\le 2|A|$ ، یا $\frac{m\kappa(G)}{2}\le|A|$. بنابراین $|A|+1>\frac{m\kappa(G)}{2}$ ، یا $\frac{|A|+1}{m}>\frac{\kappa(G)}{2}$. در نتیجه $T(G)=\frac{|A|+\tau(G-A)}{\omega(G-A)}\ge\frac{|A|+1}{m}>\frac{\kappa(G)}{2}$.



G_1

نتیجه گیری

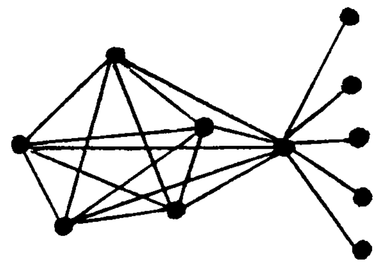
رده های بسیاری از گرافها وجود دارند که نشان می دهند پارامتر همبستگی مناسبترین اندازه گیر پایداری در شبکه هاست [۱۲] . این پارامتر قادر است بین گرافهایی که دارای پایداریهای مختلف هستند تفاوت قائل شود. مثلاً G_1,G_2 و G_3 را در نظر بگیرید.



G_2

بدون این که از پارامترها استفاده کنیم به نظر می رسد که G_1 بهتر از G_2 و این G_2 بهتر از G_3 است. اما هرسه این گرافها دارای همبندی ۱ هستند. همچنین $T(G_1)=5, t(G_1)=\frac{1}{2}, I(G_1)=10$ در حالیکه

$T(G_2)=3, t(G_2)=\frac{1}{2}, I(G_2)=6$ و $I(G_3)=6$ ، $t(G_3)=\frac{1}{6}$ و $T(G_3)=1$. می بینید که پارامتر بی نقصی تفاوتی بین G_2 و G_3 نمی گذارد، پارامتر محکمی تفاوتی بین G_1 و G_2 نمی گذارد، در حالی که $T(G_1) > T(G_2) > T(G_3)$.



G_3

حال گراف دو بخشی کامل $K_{k,n-k}$ را درنظر می گیریم. در [۱۵] ، پارامتر بستگی برای گراف دو بخشی کامل به وسیله ودال ارائه شده است. نتیجه حاصل برای $a \geq 1$ و $b \geq 1$ عبارت است از $bind(K_{a,b}) = \min\{\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\}$. لذا اگر $k \leq n-k$ آن گاه $bind(K_{k,n-k}) = \frac{k}{n-k}$. همبندی $K_{k,n-k}$ به وضوح برابر k است. از [۴] داریم $t(K_{k,n-k}) = \frac{k}{n-k}$ ، در [۲] نشان داده می شود که $K_{k,n-k}$ دارای بی نقصیی برابر با k+1 است. با لم ۳، $T(K_{k,n-k}) = \frac{k+1}{n-k}$. بنابراین نتایج زیر را برای $G = K_{k,n-k}$ داریم :

$$bind(G) = \frac{k}{n-k}, t(G) = \frac{k}{n-k}, \kappa(G) = k$$

$$T(G) = \frac{k+1}{n-k}, I(G) = k+1$$

بستگی نشان می دهد که همسایگی زیر مجموعه $A \subseteq V(K_{k,n-k})$ دارای مرتبه k و |A| = n − k است. مقدار $\kappa(K_{k,n-k})$ به ما نشان می دهد که حداقل κ راس باید حذف شوند تا گراف دو بخشی کامل متلاشی شود. اما این دو اندازه گیر نشان نمی دهند که بعد از حذف مجموعه برشی، چند مولفه باقی می ماند. چون محکمی $K_{n,n-k}$ برابر است با $\frac{k}{n-k}$ ، تعداد اعضای مجموعه برشی و تعداد مولفه ها به ترتیب برابرند با k و n − k . بی نقصی $K_{n,n-k}$ نشان می دهد که |A| = k و $\tau(K_{k,n-k} - A) = 1$. از این رو، هر دو پارامتر محکمی و بی نقصی ، به نحوی ساختار گراف را بعد از حذف مجموعه برشی A از $K_{k,n-k}$ توصیف می کنند. همبستگی گراف دو بخشی کامل نشان می دهد که $\omega(K_{k,n-k} - A) = n-k$ و $\tau(K_{k,n-k} - A) = 1, |A| = k$. از این رو تعداد مولفه ها و تعداد اعضای مجموعه برشی را به دست آورده ایم و از $\tau(K_{k,n-k} - A) = 1$ ، می دانیم که همه n − k مولفه از مرتبه ۱ هستند. لذا همه اطلاعات لازم برای تعمیر و دوباره سازی گراف دوبخشی کامل را در دست داریم . بنابراین در این رده، پارامتر همبستگی به نظر مناسبترین اندازه گیر آسیب پذیری است.

قدردانی

در اینجا لازم می بینم از دانشگاه تهران و دانشکده فنی بخاطر پشتیبانی بی دریغشان از امر تحقیقات تشکر نمایم و همچنین از جناب آقای دکتر علی عمیدی بخاطر ویرایش این مقاله تشکر کنم. روانی مقاله مدیون همیاری ایشان است. در انتها از داوران این مقاله و پیشنهادهای سازنده آنها تشکر و قدردانی می کنم.

مراجع

1 - Barefoot, C. A., Entringer, R. and Swart, H. (1987). "Integrity of trees and powers of cycles." *Congr. Number. 58,* 103-114.

2 - Barefoot, C. A., Entringer, R. and Swart, H. (1987). "Vulnerability in Graphs-A comparative survey." *J. Combin. Math. Combin. Comput, Vol. 1,* 13-22.

3 - Bundy, J. A., Murty, U. S. R. (1976). "Graph theory with applications." Macmillan Press Ltd.

4 - Chvátal, V. (1973). "Tough graphs and hamiltonian circuits." *Discrete Math., Vol. 5*, 215-228.

5 - Cozzens, M. B., Moazzami, D. and Stueckle, S. (1994). "The tenacity of the harary graphs." *J. Combin. Math. Combin. Comput,. Vol. 16.*, 33-56.

6 - Cozzens, M. B., Moazzami, D. and Stueckle, S. (1995). "The tenacity of a graph." *Graph Theory, Combinatorics, and Algorithms* (yousef Alavi and Allen Schwenk, eds.) Wiley, New York, 1111-1122.

7 - Cozzens, M. B. and Wu, S. S. (1987). "On minimun critical n-edge connected graphs." *SIAM J. Alg. and Disc. Methods*, Vol. 8, No. 4, 659-669.

8 - Cozzens, M. B. and Wu, S. S. (1990). "Critical neighborhood connectivity." *Ars Combinatoria,* Vol. 29, 144-160.

9 - Enomoto, H., Jackson, B., Katerinis, P. and Saito, A. (1985). "Toughness and the existence of K-factors." *J. Graph Theory, Vol. 9*, 87-95.

10 - Goddard, W. D. and Swart, H. C. (1990). "On the toughness of a graph." *Quaestiones Math, Vol. 13*, 217-232.

11 - Moazzami, D. (1995). "The NSM of a graph." *Combinatorics Advances (C. J. Colbourn and Mahmoodian, E. S. eds.),* Kluwer, 243-250.

12 - Moazzami, D. "Vulnerability in graphs-A comparative survey." *J. Combin. Math. Combin. Comput. To appear.*

13 - Moazzami, D. "On the vulnerability parameters of networks." *J. Discrete Applied Math. to appear.*

14 - Pippert, R. E. (1972). "On the toughness of a graph." *Lect. Notes in Math. (Graph Theory and its Applications)* 303, (Yousef, Alavi, et al., ed.), Springer, Berlin, 225-233.

15 - Woodall, D. R. (1973). "The binding number of a graph and its Anderson number." *J. Combin. Theory B,* Vol. 15, 225-255.

16 - Woodall, D. R. (1972). "Problems 1 to 3, in combinatorics." *Pro. 1972 Oxford Combinatorial Conference (D. J. Welsh and D. R. Woodall, eds.)*, Institute of Mathematics and Applications, Southends-Sea, Essex, England, 359-360.

17 - Woodall, D. R. (1972). Abstract No. 20. "The melting-point of a graph, and its Anderson number." *Graph Theory News Letter, Vol. 1,* No.4.