تحقیقات مالی
شماره۱۷ ـ بهار و تابستان ۱۳۸۳
ص‌ص ۹۵ ـ ۷۱

مدل یک‌پارچه استوار در مسأله انتخاب سهام تک‌دوره‌ای

دکتر عباس سیفی* ـ پیام حنفی زاده ـ حمید رضا نوابی*****

چکیده

در ایـن مقالـه نحـوه بـه‌کارگـیری رویکـرد بهینـه‌سـازی اسـتوار در مسـأله انـتخاب سهام (تک‌دوره‌ای) ارایه می‌شود. هم‌چنین نشان داده می‌شود که چگونه مدل استوار بر اساس تابع مطلوبیـت سرمایه‌گذار و عدم قطعیت نرخ بازگشت سهام، منطبق می‌شود. این مدل می‌تواند مبتنـی بر انتخاب مناسبی از بدنه نرمی و شعاع فضای (پارامترهای) غیر قطعی، تنظیم شود. ارزیابـی جواب‌های تولید شده از نرم‌های متفاوت l_p با تولید ۱۰۰۰۰ نمونه تصادفی از نرخ بازگشـت سهام، شبیه‌سازی شده است. نتایج محاسباتی برای درجات مختلف ریسک‌گریزی سـرمایه‌گذار، راهنمای کلی برای انتخاب l_p نرم (مقیاس اندازه‌گیری ریسک) مناسب برای مدل یک‌پارچه استوار ارایه می‌کند. به‌علاوه این آزمایشات نشان می‌دهد، وقتی عدم قطعیت (فضـای تغیـیرات قیمـت سـهام) بـزرگ است، مشخصات فردی سرمایه‌گذار در انتخاب نرم مناسب نقش مهمی ندارد.

واژه‌هـای کلـیدی: بـرنامه‌ریـزی خطـی غیر قطعی، بهینه‌سازی استوار، مسأله انتخاب سهام.

* دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیر کبیر
** دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیر کبیر
*** دانشجوی کارشناسی ارشد مدیریت صنعتی دانشگاه علامه طباطبائی

مقدمه

از مسایل مهم تصمیم‌گیری که به شدت تحت تاثیر عدم قطعیتاست، مسأله انتخاب سهام و تعیین مقدار سرمایه‌گذاری درسهام است. عدم قطعیت در این مسأله ناشی از تخمین مقادیر قیمت (نرخ سود) سهام است. این مسأله اولین بار توسط مارکویتز[1] (۱۹۵۲) به‌صورت برنامه‌ریزی ریاضی مدل‌سازی شد، حاصل کار وی جایزه نوبل در علم اقتصاد بود که در سال ۱۹۹۰ به طور مشترک با شارپ دریافت کردند. مدل مارکویتز از اطلاعات تخمین مقادیر بردار میانگین و ماتریس کوواریانس قیمت‌های سهام جهت پیشنهاد توزیع مناسب سرمایه استفاده می‌کند. در این مدل ریسک سرمایه‌گذاری از طریق واریانس قیمت (نرخ سود) سهام اندازه‌گیری می‌شود. خطای ناشی از تخمین مقادیر میانگین و واریانس در مدل مارکویتز، کیفیت توزیع سرمایه را کاهش می‌دهد. بدین ترتیب جذابیت مدل مارکویتز در بین افراد حرفه‌ای فعال در بازار سهام و سرمایه‌گذاری جهت انتخاب نوع سهام و مقدار سرمایه‌گذاری کاهش یافته است (میشایود[2]، ۱۹۹۸ و القودی، اوستری و لبرت[3]، ۱۹۹۸).

میشایود (۱۹۹۸) روش نمونه‌گیری مجدد[4] از مقادیر میانگین و ماتریس کوواریانس سود را ارایه داد. در این روش نمونه‌گیری‌ها ازداخل ناحیه اطمینانی حول مقادیر اسمی (میانگین و کوواریانس) برداشت می‌شوند. این روش برای هر مقدار نمونه، مسأله میانگین-واریانس را حل کرده وسپس جواب‌ها را یکپارچه‌سازی می‌کند. مدل‌های برنامه‌ریزی تصادفی[5] مبتنی بر سناریو نیز برای در نظر گرفتن عدم قطعیت در پارامترهای بازار وتولید جواب‌های پایدار در برابر عدم قطعیت پیشنهاد شده‌اند. این مدل‌ها کلیه مقادیر ممکنه پارامترهای غیر قطعی بازار را در قالب سناریو، در مدل وارد می‌کنند. کارهای مُلوی، واندربی و زیمبا[6] (MVZ) (۱۹۹۸) نمونه پیشرفته‌ای از این روش‌ها است. رویکردهای مبتنی بر سناریو و نمونه‌گیری از مشکلات و نقاط ضعف زیر رنج می‌برند:

اولاً محدودیت‌های مسأله به‌صورت نرم[7] یا انعطاف‌پذیر درنظر گرفته می‌شوند. چرا که تحلیل‌گر اهداف خود را جهت برآورده شدن در محدودیت‌ها قرار می‌دهد و اجازه

1. Markowitz
2. Michaud
3. El Ghaoui, Oustry & Lebret
4. Resampling Method
5. Stochastic Programming
6. Mulvy, Vanderbei & Zenios
7. Soft Constraint

می‌دهد که این محدودیت‌ها با پرداخت جریمه در تابع هدف نقض شوند. به‌طور مثال در مدل میانگین ـ واریانس، حد بالای ریسک مورد قبول سرمایه‌گذار در محدودیت‌ها قرارداده می‌شود (مارکویتز، ۱۹۵۲: ۹۱ـ۷۷). ثانیا اطلاعات از پارامترهای غیر قطعی به‌صورت سناریوهای گسسته است (همان نمونه‌گیری‌های صورت گرفته) و هر چه تعداد سناریوهایی که در تولید جواب بهینه دخالت داده می‌شوند بیشتر باشد، استواری جواب نسبت به عدم قطعیت بالاتر می‌رود. اما این موضوع باعث افزایش ابعاد مسأله از لحاظ محاسباتی می‌شود، بخصوص در شرایطی که تعداد سهام تحت مطالعه زیاد باشد (برتسیماس و سیم[1]، ۲۰۰۳: ۷۱ـ۴۹). ثالثاً هیچ تضمینی وجود ندارد که سناریوهای تولید شده بتوانند توزیع آماری قیمت‌های غیرقطعی سهام را پوشش دهند(همان).

بهینه‌سازی استوار یکی دیگر ازرویکردهای جدید برخورد با عدم قطعیت است (بن تال و نمیروسکی[2]، ۱۹۹۹). در این روش اطلاعات از پارامترهای غیر قطعی در داخل ناحیه‌ای پیوسته و محدب فرض می‌شود. این روش با تکیه بر پیشرفت‌هایی که در زمینه‌های نظری مدل‌های برنامه‌ریزی مخروطی[3] و الگوریتم‌ها روش‌های نقاط درونی[4] (نسترو[5] و نمیروسکی، ۱۹۹۳) و نرم‌افزارهای حل آن‌ها حاصل شده (بازار، شرالی و شتی[6]،۱۹۹۳ و لوبو، واندنبرگ و بوید[7]، ۱۹۹۷) توسط بن‌ـتال و نمیرفسکی (۱۹۹۹) و به‌طور مستقل القووی (۱۹۹۸) ابداع شده است. دربهینه‌سازی استوار، مدل برنامه‌ریزی ریاضی محدب غیر قطعی به یک مدل برنامه‌ریزی مخروطی قطعی که اصطلاحا جایگزین استوار[8] آن نامیده شده، تبدیل می‌شود. جواب حاصل از مدل جایگزین استوار به‌ازای کلیه مقادیر ممکنه پارامترهای غیر قطعی، خواص موجه بودن و بهینگی خود را حفظ می‌کند. بنابراین کیفیت این گونه از جواب‌ها برای برخورد با عوامل غیر قطعی دنیای واقعی، بالاتر است. هم‌چنین مشکلات رویکردهای مبتنی برسناریو و نمونه‌گیری مجدد را نیز ندارد (بن‌ـتال و نمیروسکی، ۱۹۹۹).

1. Bertsimas & Sim
2. Ben-Tal & Nemirovski
3. Conic Programming
4. Interior-Point Method
5. Nestrerov
6. Bazaar, Sherali & Shetty
7. Lobo, Vandenberghe & Boyd
8. Robust Counterpart

فضای تغییرات پارامترها، (تقریبا) کلیه مقادیر ممکنه از پارامترهای غیر قطعی را شامل می‌شود. ناحیه غیر قطعی از طریق رویکردهای آماری نظیر فاصله اطمینان همزمان[1] قابل استخراج است (جانسون و ویچرن[2]، ۱۹۹۱). رویکرد استوار اهمیت یکسانی را به کلیه مقادیر داخل فضای پارامترهای غیر قطعی می‌دهد. حنفی زاده و سیفی (۲۰۰٤) مدل برنامه‌ریزی خطی غیر قطعی بن-تال و نمیرفسکی را از طریق به‌کارگیری بدنه نرمی[3] در تعریف فضای پارامترهای غیر قطعی جامعیت بخشیدند.

بن-تال ونمیرفسکی(۱۹۹۹)، به‌عنوان مثال کاربردی از مدل برنامه‌ریزی خطی استوار، مسأله انتخاب سهامی را که MVZ با استفاده از روش بهینه‌سازی مبتنی بر سناریو حل کرده بودند مورد مدل‌سازی وحل قرارداده و با روش MVZ مقایسه کردند ونشان دادند که جواب‌های مدل استوار، سرمایه‌گذاری جذاب‌تر و با ریسک کم‌تری را ارایه می‌دهد.

هالدرسون و توتونسی[4] (۲۰۰۰) با در نظر گرفتن عناصر بردار میانگین و ماتریس کوواریانس در ناحیه‌های فاصله‌ای، مسأله انتخاب سهام را به‌صورت مسأله برنامه‌ریزی غیر خطی با محدودیت‌های نیمه معین[5] به‌صورت استوار مدل‌سازی و حل نمودند.

بن - تال، مارگالیت[6] و نمیرفسکی (۲۰۰۰) مسأله انتخاب سهام چند دوره‌ای را به‌صورت استوار مدل‌سازی کردند. مدل استوار چند دوره‌ای به‌گونه‌ای است که قیمت‌های غیر قطعی مرحله جاری را روی تصمیمات دوره‌های بعدی اثر داده و از طرف دیگر محدودیت تعادلی را بدون توجه به این‌که قیمت‌های غیرقطعی بازار چه مقادیری را در آینده می‌پذیرند، برآورده می‌سازد.

القووی، اوکاس و ایستری[7] (۲۰۰۲) مسأله انتخاب سهام با معیار مقدار سطح ریسک[8] را با رویکرد استوار و به‌صورت برنامه‌ریزی نیمه معین[9] مدل‌سازی کردند.

گلدفارب وآی نگار[10] (۲۰۰۱) مسایل میانگین ـ واریانس، حداکثر نرخ شارپ[11] و مسأله مقدار سطح ریسک را براساس رویکرد بهینه‌سازی استوار، به‌صورت مدل‌های

---

1. Simultaneously Confidence Interval
2. Johnson & Wichern
3. Norm body
4. Halldorsson & Tutuncu
5. Semi-definite Constructions
6. Margalit
7. Oks & Oustry
8. Value at Risk (VaR)
9. Semi-definite Programming
10. Goldfarb & Iyengar
11. Maximum Sharpe Ratio

برنامه‌ریزی درجه دوم مخروطی[1] مدل‌سازی کردند. آن‌ها هم‌چنین ناحیه غیر قطعی پارامترهای بازار را از طریق ناحیه اطمینان به‌دست آمده از رگرسیون اقتباس نمودند.

مطالعات فوق در چند سال اخیر نشان دهنده استقبال از رویکرد بهینه‌سازی استوار در مدل‌سازی عدم قطعیت مسایل سرمایه‌گذاری و سهام دارد. در رویکرد استوار اطلاعات از قیمت سهام به‌صورت مقادیر بردار میانگین و ماتریس کواریانس جهت معرفی فضای تغییرات نرخ سهام استفاده می‌شود. در این رویکرد فرض می‌شود که تغییرات نرخ سهام از توزیع متقارنی تبعیت می‌کند. این همان فرضی است که مارکویتز داشت. اما همان‌طوری که در مرور ادبیات دیده شد این رویکرد جهت تخصیص مقدار سرمایه‌گذاری با مقبولیت زیادی روبرو نشد. دلیل اصلی آن این است که نرخ سهام شرکت خاصی لزوما از توزیع متقارن تبعیت نمی‌کند. امروزه رویکرد مارکویتز و به تبع آن رویکردهای پیشرفت‌های نظیر بهینه‌سازی استوار که در زمره برنامه‌ریزی ریاضی قرار می‌گیرند در قسمت انتخاب صنعت و تشکیل سبد سهام استفاده می‌شوند. علت این موضوع این است که شاخص صنعت به جهت این‌که از ترکیب نرخ سهام کلیه شرکت‌های فعال در صنعت مذکور به‌دست می‌آید، طبق قضیه حد مرکزی به سمت توزیع متقارن نرمال میل می‌کند. امروزه یکی از روش‌های متداول در انتخاب سهام این است که فرایند تصمیم‌گیری در دو مرحله کلان و خرد صورت می‌گیرد. در مرحله کلان صنایع جذاب و سودآور جهت سرمایه‌گذاری انتخاب می‌شوند. در مرحله خرد، به تحلیل شرکت‌های هر صنعت پرداخته شده و شرکت‌های مناسب جهت سرمایه‌گذاری انتخاب می‌شوند. بدین ترتیب سبد سهام تشکیل می‌شود. در این رویکرد دو مرحله‌ای، روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی در مرحله کلان جهت انتخاب صنایع کاربرد مناسبی دارند.

در این مقاله، قصد داریم که اولاًمسأله انتخاب سهام تک‌دوره‌ای را با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار مدل‌سازی کرده و ثانیاً از ویژگی‌های بدنه نرمی استفاده کرده تا جواب‌های مختلفی را مرتبط با نرم‌های مختلف l_p تولید کنیم و ثالثاً از اطلاعات ریسک‌پذیری سرمایه‌گذار استفاده کرده تا مدل مناسب اندازه‌گیری ریسک و متعاقباً توزیع مناسب سرمایه در صنایع مختلف را انتخاب نمائیم.

این مقاله در پنج بخش دیگر سازماندهی شده است. در بخش ۲، مدل یک‌پارچه در بهینه‌سازی استوار معرفی می‌شود. سپس در بخش ۳ مدل یک‌پارچه استوار مسأله انتخاب

1. Second Order Cone Programming (SOCP)

سهام مدل‌سازی شده و مدل‌های مختلف اندازه‌گیری ریسک در حالت متقارن از آن اشتقاق می‌شوند. در بخش ٤ مثال نمونه‌ای جهت ارزیابی مدل ارایه می گردد و با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو عملکرد جواب‌های مدل مورد ارزیابی و مقایسه قرار می گیرند. در این بخش نشان داده می‌شود که مدل‌ساز می‌تواند با توجه به شرایط عدم قطعیت و اطلاعات ریسک‌پذیری یا ریسک‌گریزی سرمایه‌گذار، مدل را تنظیم نماید. نتیجه‌گیری در بخش ۵ ارایه می‌شود.

مدل یک‌پارچه در بهینه‌سازی استوار

مسأله برنامه‌ریزی خطی غیر قطعی براساس روش‌شناسی بهینه‌سازی استوار به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

(۱)

$$\begin{aligned} &\max \quad c^T x \\ &\text{subject to} \quad (a_i ; b_i)^T x \le 0, \qquad (a_i ; b_i) \in U_i, \quad i = 1,\dots,m \\ &\qquad\qquad\qquad x \ge 0. \end{aligned}$$

در این مدل فرض می کنیم که در محدودیت i ام $x = (x;-1)^T$ و مقدار پارامترهای $(a_i ; b_j)$ $i = 1,\dots,m$ غیر قطعی بوده و به ناحیه پیوسته و محدب U_i متعلق باشند. عدم قطعیت در بردار c را نیز می‌توان به‌صورت محدودیت غیر قطعی به مسأله اعمال نمود. فضای پارامترهای غیر قطعی محدودیت i ام، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

(۲)

$$U_i(p,r) = \left\{ (a_i ; b_i) : (a_i ; b_i) = (a_i^0 ; b_i^0) + W^i u \,\middle|\, u \in B_p(r) \right\}$$

به‌طوری‌که W^i ماتریس متقارن و مثبت معین[1] و $(a_i^0 ; b_i^0)$ مقدار اسمی یا ارزش انتظاری پارامترهای غیر قطعی $(a_i ; b_i)$ است. هم‌چنین $B_p(r)$ معرف بدنه نرمی بوده که به شرح زیر تعریف می‌شود:

(۳)

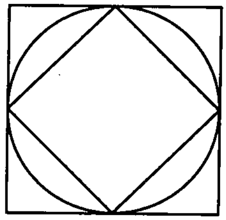
1. Positive Definite Matrix

$$B_p(r) = \{u \mid \| u \|_p \le r\}$$

که در آن r شعاع ناحیه غیر قطعی و نرم $\|u\|_p$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

(۴)

$$\| u \|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |u_j|^p \right)^{1/p}$$



تصویر ۱. بدنه نرمی جهت تخمین فضای تغییرات پارامترهای غیر قطعی در فضای دو بعدی

در ریاضیات از مفهوم نرم جهت اندازه‌گیری فاصله دو بردار استفاده می‌شود. در اینجا تغییرات پارامترهای غیر قطعی از مقدار اسمی‌اشان (منظور تخمین یا برآورد) با استفاده از تعریف نرم محاسبه می‌شود و فضای این تغییرات را در بدنه نرمی قرار می‌گیرد. بدنه نرمی به دو پارامتر شعاع r و درجه نرم p وابسته است. با فرض کردن شعاع ثابت، انتخاب درجه نرم اشکال متمایزی را برای معرفی ناحیه تغییرات پارامترهای غیر قطعی ارایه می‌دهد. به‌طور مثال در فضای دو بعدی، نرم بی‌نهایت که در تصویر ۱ به‌صورت مربع تصویر شده است، ماکزیمم تغییرات را اندازه‌گیری می‌کند و به‌نحوی تخمین کننده برش توزیع متقارن یک‌نواخت است. نرم ۲ شکل دایره، فاصله اقلیدسی را جهت اندازه‌گیری تغییرات بیان می‌کند و تخمین زننده ناحیه برش یافته از توزیع نرمال است. لوزی نیز بیان کننده نرم۱ است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود این نواحی با بزرگ شدن درجه نرم، بزرگ شده و فضای بزرگ‌تری را جهت معرفی ناحیه تغییرات پارامترهای غیر قطعی ارایه می‌کند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود چنان‌چه از درجه نرم بزرگ‌تر استفاده کنیم، ناحیه بزرگ‌تری را برای تغییرات پارامترهای غیر قطعی در نظر گرفته‌اید و این بیانگر این است که مخاطره ناشی از تغییرات خارج از این ناحیه کم‌تر است. عدم قطعیت در ضرایب تابع هدف C را نیز می‌توان به‌صورت محدودیت غیرقطعی به مسأله اعمال کرد.

براساس تعریف فضای پارامترهای غیر قطعی مدل جایگزین استوار[1] مسأله برنامه‌ریزی خطی غیر قطعی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max \quad & t \\ \text{subject to} \quad & c^{0^T} x - r_0 \left\| w^0(x) \right\|_{p_0} \geq t, \\ & (a_i^0; b_i^0)^T x + r_i \left\| w^i(x) \right\|_{p_i} \leq 0, \quad \text{for } i = 1, \dots, m \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{۵}$$

به‌طوری‌که $w^i(x) = W^{i^T} x$ است. این مدل تحت عنوان مدل جایگزین استوار یک‌پارچه نام‌گذاری شده است (برای جزئیات به حنفی‌زاده و سیفی (۲۰۰٤) مراجعه شود). در این مدل اطلاعات از پارامترهای غیر قطعی به‌صورت بردار میانگین و ماتریس کواریانس و شعاع ناحیه غیر قطعی در مدل جایگزین وارد می‌شوند. نظر به این‌که مسأله انتخاب سهام تک‌دوره‌ای به‌صورت برنامه‌ریزی خطی غیر قطعی مدل می‌شود، لذا در ادامه این مسأله را به‌صورت استوار مدل‌سازی می‌نماییم.

مدل یک‌پارچه استوار مسأله انتخاب سهام

فرض می‌کنیم n سهم متفاوت در بازار سهام وجود دارد. هم‌چنین فرض می‌کنیم که نرخ بازگشت هر واحد پولی که در سهم jام سرمایه‌گذاری می‌شود، متغیر تصادفی بوده که به‌طور متقارن روی ناحیه‌ای پیوسته و محدود توزیع یافته است (بدنه نرمی). در این مسأله به دنبال نحوه توزیع سرمایه‌گذاری در سهام هستیم که برگشت کل سرمایه را حداکثر کند. مسأله انتخاب سهام به‌صورت مدل برنامه‌ریزی خطی غیر قطعی به‌شرح زیر است:

$$\begin{aligned} \max_{x_j} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \\ & x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{٦}$$

1. Robust counterpart

در این مدل c_j به‌عنوان پیش بینی نرخ برگشت حاصل از سرمایه‌گذاری در سهم jام، غیر قطعی است. چرا که لزوما مقدار پیش بینی شده برای افق سرمایه‌گذاری (تک دوره‌ای) از مقدار واقعی آن انحراف دارد. با در نظر گرفتن ارزش انتظاری برای نرخ بازگشت، جواب بهینه، سرمایه‌گذاری در سهم با حداکثر ارزش انتظاری است. اما این جواب غیر قابل اعتماد و دارای ریسک زیاد است بخصوص در شرایطی که پراکندگی این سهم بالا باشد. برای تولید جواب‌هائی که از ریسک کم‌تری برخوردار باشند و البته سرمایه‌گذاری سودآوری را نیز پیشنهاد دهند از مدل یک‌پارچه استوار استفاده می‌کنیم. مدل برنامه‌ریزی خطی غیر قطعی (٦) به مدل برنامه‌ریزی غیر خطی اما قطعی زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & t \\
\text{subject to} \quad & c^T x - r \left\| W^T x \right\|_p \geq t, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
\qquad (۷)
$$

این مدل می‌تواند با فرض استقلال نرخ بازگشت یا در نظر گرفتن همبستگی آن‌ها به‌صورت ماتریس کوواریانس مدل‌های مختلفی را به‌شرح زیر تولید کند. هر کدام از مدل‌های تولید شده مبتنی به در نظر گرفتن شرایط خود، جواب‌های استوار تولید می‌کنند. ابتدا فرض می‌کنیم که نرخ‌های بازگشت سرمایه از هم مستقل باشند. در این حالت W ماتریس قطری واریانس به‌صورت $W = Diag(\sigma_j)$, $j = 1,\ldots,n$ خواهد بود. در این حالت با انتخاب یکی از نرم‌های ۱، ۲و بی‌نهایت، نسخ متفاوتی از مدل استوار (۷) که معرف معیارهای متفاوت اندازه‌گیری ریسک هستند را ارایه می‌کنیم:

مسأله انتخاب سهام با نرم ۱

با قرار دادن نرم ۱ در مدل(۷) مسأله انتخاب سهام به‌صورت مدل برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & t \\
\text{subject to} \quad & c^{0^T}x - r\sum_{j=1}^{n}\sigma_j x_j \geq t\,, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1\,, \\
& x \geq 0\,.
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

در ایـن مـدل انحـراف از مقـدار میانگیـن توسـط نـرم ۱ (فاصله مستطیلی) اندازه‌گیری مـی‌شـود. ایـن مـدل همانـند مدل متوسط قدر مطلق انحراف از میانگین[1] است که در تحقیق کونو و یامازاکی[2] (۱۹۹۱) معرفی شده است.

مسأله انتخاب سهام با نرم۲

بـا قـرار دادن نـرم ۲ در مـدل(۷) مسـأله انتخاب سهام به‌صورت مدل برنامه‌ریزی درجه دوم مخروطی[3] تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & t \\
\text{subject to} \quad & c^{0^T}x - r\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2} \geq t\,, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1\,, \\
& x \geq 0\,.
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

ایـن مـدل انحـراف از مقـدار میانگیـن را توسـط نـرم ۲ (فاصـله اقلیدسی) اندازه‌گیری می‌کند. این مدل همانند مدل میانگین ـ واریانس مارکویتز (۱۹۵۴) است.

مسأله انتخاب سهام با نرم بی‌نهایت

بـا قـرار دادن نرم بی‌نهایت در مدل(۷) مسأله انتخاب سهام به‌صورت مدل برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود:

1. Mean-Absolute Deviation (MAD)
2. Konno & Yamazaki
3. Second Order Cone Programming (SOCP)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & t \\
\text{subject to} \quad & c^{0^T}x - r_0\tau_0 \geq t, \\
& \sigma_j x_j \leq \tau \quad \text{for } j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

این مدل انحراف از مقدار میانگین را توسط نرم بی‌نهایت (فاصله ماکزیمم) اندازه‌گیری می‌کند. این مدل همانند مدل حداقل ـ حداکثر یانگ[1] (۱۹۹۸) است.

مسأله انتخاب سهام با نرم ماتریسی

با قرار دادن نرم ماتریسی در مدل(۷) مسأله انتخاب سهام به‌صورت مدل برنامه‌ریزی درجه دوم مخروطی تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & t \\
\text{subject to} \quad & c^{0^T}x - r\left\|L^T x\right\|_2 \geq t, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

این مدل میزان انحراف از مقدار میانگین را توسط نرم ماتریسی اندازه‌گیری می‌کند. این مدل در شرایطی استفاده می‌شود که سهم‌ها با هم وابستگی دارند. این مدل نیز همانند مدل میانگین ـ واریانس در شرایط همبستگی داده‌ای از ماتریس کوواریانس استفاده می‌کند. تبدیل آن به‌صورت مخروطی در تحقیق حنفی‌زاده و سیفی آورده شده است.

در ادامه به مقایسه مدل‌های ارایه شده پرداخته و شرایط استفاده از آن‌ها را مبتنی بر اطلاعات از داده‌های تاریخی و ویژگی‌های سرمایه‌گذار مشخص می‌سازیم.

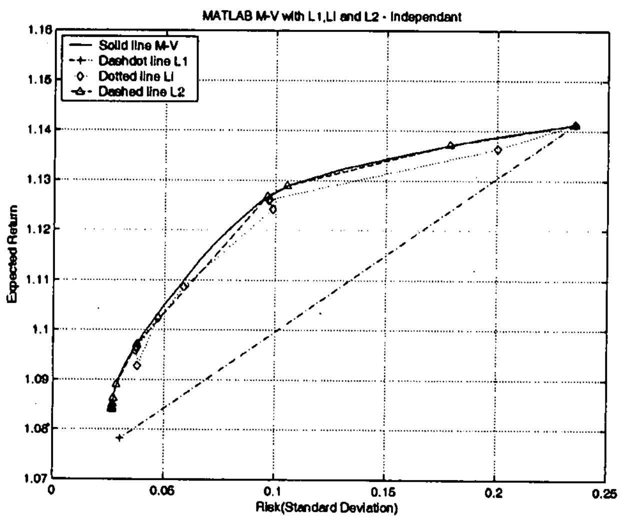
مثال کاربردی

به جهت ارزیابی نتایج مدل‌های ۹، ۸، ۱۰ و ۱۱، از اطلاعات تاریخی مربوط به هشت شاخص از سهام که از مرجع تحقیق واندربی[2] گرفته شده به‌عنوان داده ورودی استفاده

---

1. Young
2. Vanderbie

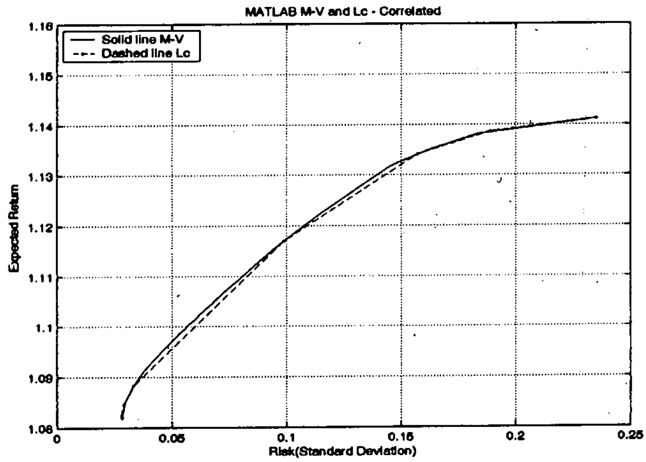
می‌کنیم. همان‌طوری که ملاحظه می‌شود این اطلاعات شامل ۲۲ سال نرخ بازگشت سهام با میانگین و ماتریس کوواریانس آن‌ها است که در نگاره شماره (۱) از ضمیمه ۱ آورده شده است. مدل‌های انتخاب سهام تک مرحله‌ای ۹، ۸، ۱۰ و ۱۱ را برای شعاع‌های متفاوت از ناحیه غیر قطعی، حل می‌نماییم. نتایج حاصل از حل این مدل‌ها در نگاره‌های (۲، ۳، ٤ و ۵) به ترتیب آمده است. برای مقایسه نتایج این مدل‌ها از نمودارمرز کارآمدی[1] استفاده می‌کنیم. نموار شمارهٔ (۱) مقایسه مرزکارآمدی مدل‌های مختلف (خطوط خط ـ چین) را با مدل میانگین ـ واریانس مارکویتز (خط پر) ارایه می‌کند. جهت رسم مرز کارآمدی مدل میانگین ـ واریانس از نرم افزار MATLAB استفاده شده است.



نمودار ۱. مقایسه مرز کارآمدی مدل‌های l_p- نرم با مدل میانگین ـ واریانس

همان‌طور که ملاحظه می‌شود کلیه مدل‌ها رفتار مشابه‌ای را در مقایسه با مرز کارآمدی مدل میانگین ـ واریانس از خود نشان می‌دهند. یعنی از آن‌ها می‌توان به‌عنوان مقیاس مناسبی جهت اندازه‌گیری ریسک استفاده نمود (میترا و همکاران در تحقیق مشابهی مدل‌های همانند با مدل‌های ۸، ۹ و ۱۰ را به تفضیل مقایسه کرده‌اند).

1. Efficient Frontier



نمودار ۲. مقایسه مرز کارآمدی مدل نرم ماتریسی با مدل میانگین ـ واریانس

نمودار شمارهٔ (۲) مقایسه مرزکارآمدی مدل نرم ماتریسی (خط چین) را با مدل میانگین-واریانس مارکویتز (خط پر) ارایه می‌کند. در مدل (۱۱) از ماتریس کوواریانس استفاده شده است.

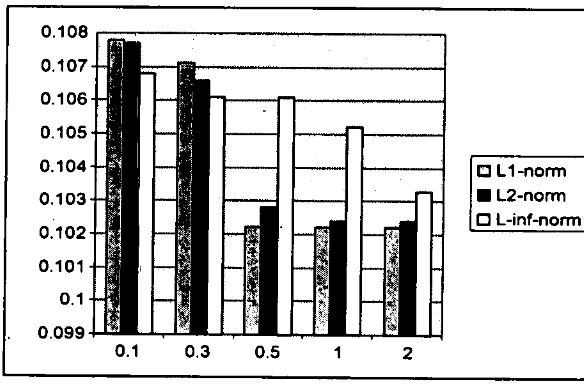
حال سئوالی که مطرح می‌شود این است که کدام‌یک از این مدل‌ها جهت تصمیم گیری در توزیع سرمایه مناسب‌تر است؟ برای پاسخ به این سئوال، عملکرد جواب‌های هر کدام از مدل‌ها را در مقابل مقادیر شبیه‌سازی شده نرخ‌های بازگشت سرمایه ارزیابی می‌کنیم. نحوه شبیه‌سازی نرخ بازگشت سرمایه در ضمیمه شمارهٔ ۳ آمده است. جهت ارزیابی عملکرد هرکدام از جواب‌های l_p- نرم، ازعایدی کل حاصل از سرمایه‌گذاری استفاده می‌کنیم. اما مسلما تنها با عایدی کل حاصل از سرمایه‌گذاری نمی‌توان به مقایسه پرداخت، چراکه هر عایدی در مقابل پذیرفتن حداقل ریسکی قابل بررسی است. این مسأله باعث اختلاف سلیقه میان سرمایه‌گذاران می‌شود، چراکه میزان ریسک‌پذیری و ریسک‌گریزی افراد متفاوت است. بنابراین نیاز به معیاری داریم تا بتوانیم با استفاده از آن مطلوبیت نهائی افراد را اندازه‌گیری کنیم. براین اساس از تابع مطلوبیت معرفی شده توسط بازار و دیگران به‌شرح زیر استفاده می‌کنیم:

$$u(t) = 1 - e^{-kt} \qquad (۱۲)$$

در این رابطه t عایدی کل حاصل از سرمایه‌گذاری و $k > 0$ ضریب مغایرت ریسک[1] نامیده می‌شود. با فرض این که عایدی کل حاصل از سرمایه‌گذاری دارای توزیع نرمال باشد، می‌توانیم ریسک را به‌شرح زیر وارد تابع مطلوبیت کنیم:

$$\overline{u}(t) = 1 - e^{(-k\bar{t}+0.5k^2\sigma^2)} \qquad (۱۳)$$

$\overline{u}(t)$ متوسط تابع مطلوبیت حاصل از سرمایه‌گذاری است که تابعی از میزان ریسک‌گریزی k و میانگین و واریانس نرخ بازگشت هر سهم بعد از دوره سرمایه‌گذاری است. هرچقدر ضریب ریسک‌گریزی کوچک‌تر، فرد ریسک‌پذیرتر و هرچه بزرگ‌تر،فرد ریسک‌گریزتر است (بازار و دیگران، ۱۹۹۳).



نمودار ۳. نمودارمقادیرتابع مطلوبیت نرم‌های متفاوت درسطوح مختلف ازعدم قطعیت

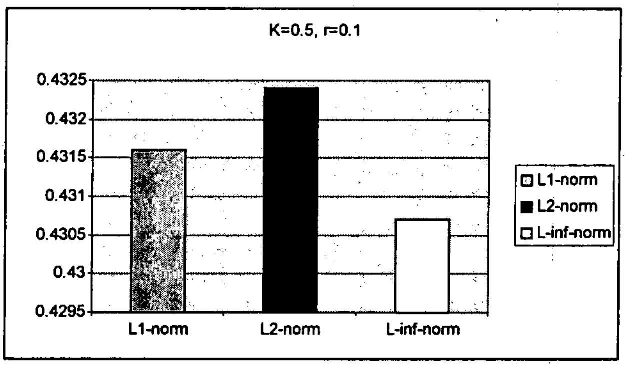
نمودار شمارهٔ (۳) تابع مطلوبیت نرم‌های متفاوت را در محور عمودی و شعاع ناحیه غیر قطعی را در محور افقی نشان می‌دهد. با مقایسه مقدار تابع مطلوبیت در سطوح مختلف عدم قطعیت می‌توان نتیجه گرفت که وقتی عدم قطعیت کم است (شعاع فضای غیر قطعی ۰/۱ تا ۰/۳) استفاده از نرم‌های پایین تابع مطلوبیت بالاتری را می‌دهد اما وقتی عدم قطعیت زیاد (شعاع فضای غیر قطعی بیش از ۰/۵) می شود استفاده از نرم‌های بالا نتیجه بهتری می‌دهد.

در نمودارهای شماره ٤، ٥ و ٦، اثر عدم قطعیت وریسک‌گریزی بر تابع مطلوبیت را بررسی می‌کنیم. نمودار شماره (٤) نشان می‌دهد که وقتی عدم قطعیت کم ($r = 0.1$) و

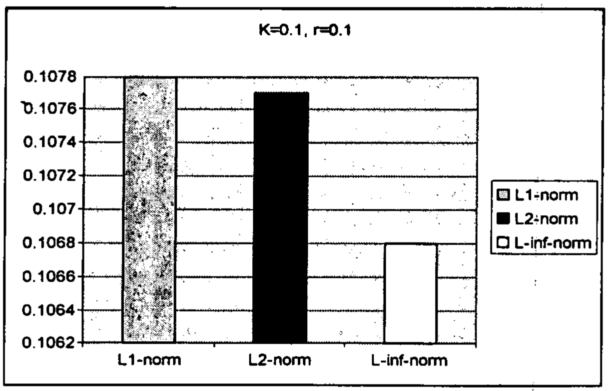
---

1. Risk Aversion

سرمایه‌گذار ریسک پذیر($k=0.1$) است، استفاده از نرم ۱ بیشترین تابع مطلوبیت را نتیجه می‌دهد. اما همان‌طور که در نمودار شمارهٔ (۵) نمایش داده‌ایم وقتی سرمایه‌گذار ریسک گریزتر($k=0.5$) می‌شود و عدم قطعیت هم‌چنان کم ($r=0.1$) است، نرم ۲ نتیجه بهتری می‌دهد.

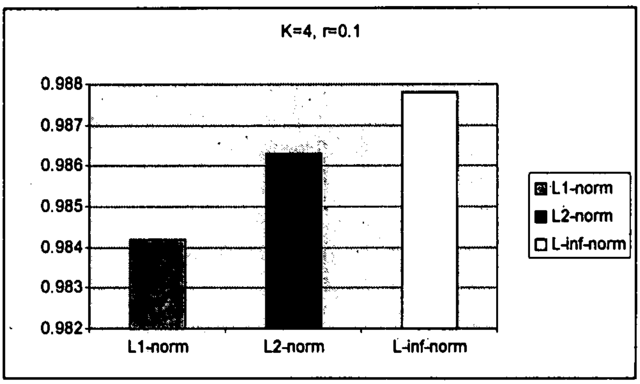


نمودار ۴. تابع مطلوبیت وقتی ریسک گریزی وعدم قطعیت کم است



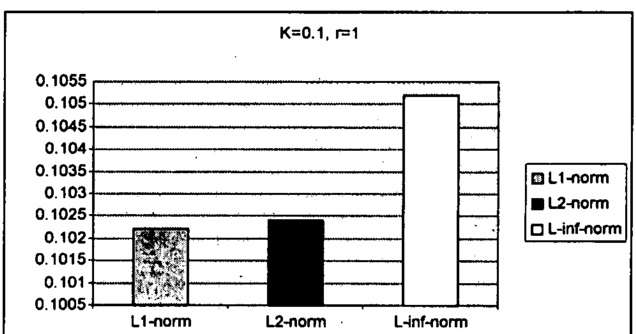
نمودار ۵. تابع مطلوبیت وقتی ریسک گریزی متوسط و عدم قطعیت کم است

زمانی که عدم قطعیت کم ($r=0.1$) و سرمایه‌گذار ریسک گریز($k=4$) است، نرم بی‌نهایت بیش‌ترین مقدار تابع مطلوبیت را نتیجه می‌دهد که در نمودار شمارهٔ (٦) نشان داده‌ایم.

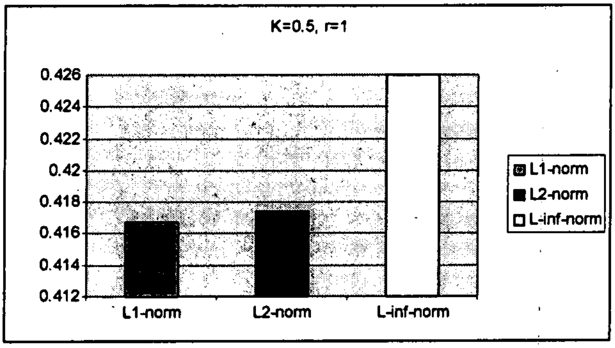


نمودار ۶ تابع مطلوبیت وقتی ریسک گریزی زیاد وعدم قطعیت کم است

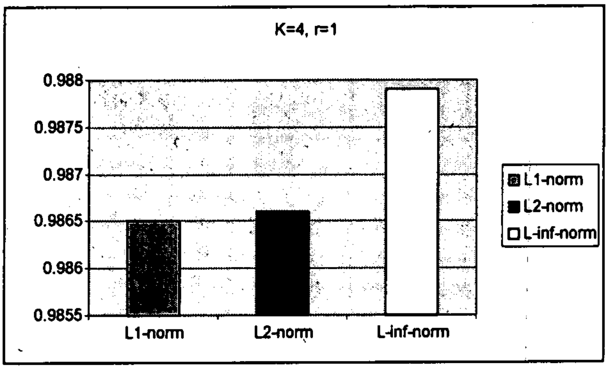
وقتی عدم قطعیت بالا ($r=1$) باشد در هر سطحی از ریسک‌گریزی سرمایه‌گذار، نرم‌های بالاتر نتایج بهتری را می‌دهند. همان‌طور که در نمودارهای شمارهٔ ۷، ۸ و ۹ مشاهده می‌شود، نرم بی‌نهایت در تمام سطوح ریسک‌گریزی، بالاترین تابع مطلوبیت را نتیجه می‌دهد.



نمودار ۷. تابع مطلوبیت وقتی که ریسک گریزی کم و عدم قطعیت زیاد است



نمودار ۸. تابع مطلوبیت وقتی که ریسک گریزی متوسط و عدم قطعیت زیاد است



نمودار ۹. تابع مطلوبیت زمانی که ریسک گریزی وعدم قطعیت زیاد است

نتیجه گیری

با توجه به آزمایشات شبیه‌سازی می‌توان گفت که وقتی عدم قطعیت کم است میزان ریسک‌گریزی سرمایه‌گذار در تعیین مدل مناسب بسیار موثر است به‌طوری‌که وقتی سرمایه‌گذار تمایل به پذیرش ریسک دارد استفاده از نرم ۱و۲ مطلوبیت بهتری را می‌دهد و وقتی ریسک‌پذیری سرمایه‌گذار کم است (ریسک‌گریزی زیاد است) نرم بی‌نهایت بیش‌ترین مطلوبیت را نتیجه می‌دهد. اما وقتی عدم قطعیت زیاد است استفاده از نرم‌های بالاتر تابع مطلوبیت بهتری را نتیجه می‌دهند.

منابع

Alizadeh, F., Haeberly, J.P., Nayakkankuppam, M. V. and Overton, M. L. (1997). SDPPACK Vser,s Guide, Version 0.8 Beta. NYV.

Bazaar, M.S., Sherali, H.D. and Shetty, C.M.,(1993). *Nonlinear programming, Theory and Algorithms* (John Wiley and Sons, Inc. Second Edition.

Ben-Tal, A., and Nemirovski, A. (1999). Robust solutions to uncertain linear programs. OR Letter 25,1-13.

Ben-Tal, A., Margalit, L. and Nemirovski, A.(2000). Robust Modeling of Multi-stage Portfolio Problems, In High Performance Optimization, Kluwer Academic Publishers. 303-328

Bertsimas, D. and Sim, M. (2003). Robust descrete optimization and network flows. Math prog , ser. B , 98: 49-71

El Ghaoui, L., Oks, M., and Oustry, F. (2002). Worst-case Value at Risk and Robust Portfolio Optimization: A Conic Programming Approach. Accepted for publication in Operation Research.

El Ghaoui, L., Oustry, F., Lebret, H.(1998). Robust solutions to uncertain semi definite programs. SIAM J. on Optimization 9, 33-52.

Goldfarb, D. and Iyengar, G. (2001): Technical Report, IEOR Department, Columbia University.

Halldorsson, B.V. and Tutuncu, R.H. (2003). An interior-point method for a class of saddle point problems, Jornal of Optimization Theory and Applications, Vol.116, No.3, pp559-590.

Hanafizadeh, P. and Seifi, A. (2004). A Unified Model for Robust Optimization of Linear Programs with Uncertain Parameters, Transactions on Operational Research, 16, pp. 1-21.

Johnson R. A. and Wichern D. W., Applied Multivariate Statistical Analysis, third edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632.

Konno, H. (1988): Portfolio optimization using L_1 risk function, IHSS report p.88-9, Institute of Human and Social Sciences, *Tokyo Institute of Technology.*

Konno, H. and Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo Stock Market, *Management Science*, 37, p. 519-531.

Lobo, M.S., Vandenberghe, L. and Boyd, S. (1997). SOCP: Software for Second-order Cone Programming, Information System Laboratory, Stanford University.

Markowitz, H.M. (1952). "Portfolio selection", *Journal of Finance*, 7, p.77-91.

Markowitz, H.M. (1959). "Portfolio selection: Efficient Diversification of Investments", Wiley, New York, NY.

Michaud, R. O. (1998). Efficient Asset Management: a Practical Guide to Stock Portfolio Management andAsset Allocation. Financial *Management Association Survey and Synthesis Series*. HBS Press.

Mitra, G. Kyriakis, T. Lucas, C. and Pirbhai, M., (2002). A Review of Portfolio Planning: Models and Systems, CARISMA Brunel university, to appear as an invited chapter in: Advances in Portfolio Construction and Implementation.

Mulvy , J.M., Vanderbei, R.J. and Zenios, S.A. (1995). "Robust optimization of large-scale systems" , *Operation Research* 43 ,264 -281.

Nesterov, Y. and Nemirovski, A, (1993). Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming, SIAM, Philadelphia.

Vanderbie, R.J. Linear Optimization, Lecture 18, convex optimization, expected utility optimization, Department of Operation research and financial engineering, Princeton University, NJ

Young, M.R. (1998). "A minimax portfolio selection rule with linear programming solution", *Management Science*, 44, p. 673-683.

ضمیمه ۱

اطلاعـات مـربوط بـه نرخ بازگشت سالیانه هشت شرکت که از تحقیق واندربی گرفته شده است رادر نگاره شماره (۱) آورده شده است.

Year	US 3-Month T-Bills	US Gov. Long Bonds	S&P 500	Wilshire 5000	NASDAQ Composite	Lehman Bros. Corp. Bonds	EAFE	Gold
1973	1.075	0.942	0.852	0.815	0.698	1.023	0.851	1.677
1974	1.084	1.020	0.735	0.716	0.662	1.002	0.768	1.722
1975	1.061	1.056	1.371	1.385	1.318	1.123	1.354	0.760
1976	1.052	1.175	1.236	1.266	1.280	1.156	1.025	0.960
1977	1.055	1.002	0.926	0.974	1.093	1.030	1.181	1.200
1978	1.077	0.982	1.064	1.093	1.146	1.012	1.326	1.295
1979	1.109	0.978	1.184	1.256	1.307	1.023	1.048	2.212
1980	1.127	0.947	1.323	1.337	1.367	1.031	1.226	1.296
1981	1.156	1.003	0.949	0.963	0.990	1.073	0.977	0.688
1982	1.117	1.465	1.215	1.187	1.213	1.311	0.981	1.084
1983	1.092	0.985	1.224	1.235	1.217	1.080	1.237	0.872
1984	1.103	1.159	1.061	1.030	0.903	1.150	1.074	0.825
1985	1.080	1.366	1.316	1.326	1.333	1.213	1.562	1.006
1986	1.063	1.309	1.186	1.161	1.086	1.156	1.694	1.216
1987	1.061	0.925	1.052	1.023	0.959	1.023	1.246	1.244
1988	1.071	1.086	1.165	1.179	1.165	1.076	1.283	0.861
1989	1.087	1.212	1.316	1.292	1.204	1.142	1.105	0.977
1990	1.080	1.054	0.968	0.938	0.830	1.083	0.766	0.922
1991	1.057	1.193	1.304	1.342	1.594	1.161	1.121	0.958
1992	1.036	1.079	1.076	1.090	1.174	1.076	0.878	0.926
1993	1.031	1.217	1.100	1.113	1.162	1.110	1.326	1.146
1994	1.045	0.889	1.012	0.999	0.968	0.965	1.078	0.990
Mean	1.0781	1.0929	1.1198	1.1236	1.1213	1.0918	1.1412	1.1290
Std. dev.	0.0305	0.1522	0.1682	0.1786	0.2236	0.0806	0.2354	0.3565

نگاره ۱. داده‌های تاریخی نرخ سهام ماتریس کوواریانس مرتبط با داده‌های مسأله

$$C = \begin{pmatrix} 0.0009 & -0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0003 & -0.0013 & 0.0008 \\ -0.0001 & 0.0232 & 0.0113 & 0.0106 & 0.0118 & 0.0115 & 0.0110 & -0.0141 \\ 0.0001 & 0.0113 & 0.0283 & 0.0297 & 0.0329 & 0.0075 & 0.0219 & -0.0185 \\ 0.0001 & 0.0106 & 0.0297 & 0.0319 & 0.0371 & 0.0071 & 0.0231 & -0.0166 \\ -0.0003 & 0.0118 & 0.0329 & 0.0371 & 0.0500 & 0.0076 & 0.0245 & -0.0164 \\ 0.0003 & 0.0115 & 0.0075 & 0.0071 & 0.0076 & 0.0065 & 0.0044 & -0.0115 \\ -0.0013 & 0.0110 & 0.0219 & 0.0231 & 0.0245 & 0.0044 & 0.0554 & -0.0140 \\ 0.0008 & -0.0141 & -0.0185 & -0.0166 & -0.0164 & -0.0115 & -0.0140 & 0.1271 \end{pmatrix}$$

ضمیمه ۲

نتایج حاصل از حل مدل‌ها با نرم‌های مختلف را در نگاره‌های این ضمیمه ارایه می‌کنیم:

نگاره۲. نتایج توزیع سرمایه با مدل نرم l_1

US 3-Month T-Bills	US Gov. Long Bonds	S&P 500	Wilshire 5000	NASDAQ Composite	Lehman Bros. Corp. Bonds	EAFE	Gold	r	Mean	Std. Dev.
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0014	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0028	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0055	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0110	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0221	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0442	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0884	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.1768	1.1412	0.2354
1	0	0	0	0	0	0	0	0.3536	1.0781	0.0305
1	0	0	0	0	0	0	0	0.7071	1.0781	0.0305
1	0	0	0	0	0	0	0	1.4142	1.0781	0.0305
1	0	0	0	0	0	0	0	2.8284	1.0781	0.0305
1	0	0	0	0	0	0	0	5.6569	1.0781	0.0305
1	0	0	0	0	0	0	0	11.3137	1.0781	0.0305
1	0	0	0	0	0	0	0	22.6274	1.0781	0.0305
1	0	0	0	0	0	0	0	45.2548	1.0781	0.0305

US 3-Month T-Bills	US Gov. Long Bonds	S&P 500	Wilshire 5000	NASDAQ Composite	Lehman Bros. Corp. Bonds	EAFE	Gold	r	Mean	Std. Dev.
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0014	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0028	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0055	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0110	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0221	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0442	1.1412	0.2354
0	0	0	0.1492	0	0	0.7285	0.1222	0.0884	1.1371	0.1789
0	0	0.1969	0.2551	0.1292	0	0.3322	0.0865	0.1768	1.1289	0.1052
0	0.0020	0.2609	0.2653	0.1552	0	0.2385	0.0783	0.3536	1.1268	0.0965
0.4432	0.0519	0.0931	0.0890	0.0544	0.1755	0.0682	0.0247	0.7071	1.0971	0.0378
0.6501	0.0390	0.511	0.0478	0.0296	0.1355	0.0340	0.0129	1.4142	1.0889	0.0287
0.7163	0.0348	0.0377	0.0346	0.0216	0.1230	0.0230	0.0091	2.8284	1.0863	0.0273
0.7470	0.0330	0.0315	0.0285	0.0180	0.1168	0.0179	0.0074	5.6569	1.0851	0.0269
0.7618	0.0320	0.0285	0.0255	0.0162	0.1139	0.0155	0.0065	11.3137	1.0845	0.0269
0.7693	0.0316	0.0270	0.0241	0.0153	0.1125	0.0142	0.0061	22.6274	1.0842	0.0269
0.7730	0.0314	0.0262	0.0233	0.0149	0.1118	0.0136	0.0059	45.2548	1.0841	0.0268

نگاره ۳. نتایج توزیع سرمایه با مدل l_2

US 3-Month T-Bills	US Gov. Long Bonds	S&P 500	Wilshire 5000	NASDAQ Composite	Lehman Bros. Corp. Bonds	EAFE	Gold	r	Mean	Std. Dev.
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0014	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0028	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0055	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0110	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0221	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0442	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	0.6023	0.3977	0.0884	1.1363	0.2005
0	0	0.2579	0.2427	0.1937	0	0.1842	0.1214	0.1768	1.1261	0.0969
0	0	0.2439	0.2472	0.1975	0	0.1876	0.1239	0.3536	1.1262	0.0974
0.0019	0	0.2439	0.3449	0.2117	0	0.0826	0.1150	0.7071	1.1242	0.0989
0.0660	0.1448	0.1324	0.1243	0.0992	0.2765	0.0946	0.0621	1.4142	1.1086	0.0588
0.4397	0.0879	0.0796	0.0739	0.0598	0.1647	0.0569	0.0375	2.8284	1.0964	0.0378
0.4396	0.0860	0.0796	0.0747	0.0597	0.1661	0.0569	0.0375	5.6569	1.0965	0.0377
0.4384	0.0878	0.0794	0.0748	0.0597	0.1658	0.0567	0.0375	11.3137	1.0965	0.0378
0.4384	0.0877	0.0794	0.0748	0.0597	0.1658	0.0567	0.0375	22.6274	1.0965	0.0378
0.4433	0.0904	0.0803	0.0769	0.0616	0.1558	0.0532	0.0385	45.2548	1.0964	0.0379

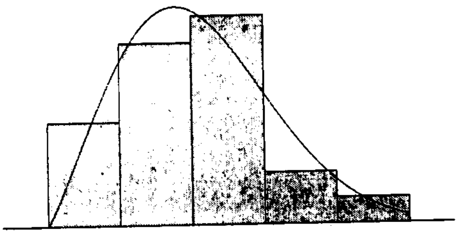
نگاره ۴. نتایج توزیع سرمایه با مدل l_∞

US 3-Month T-Bills	US Gov. Long Bonds	S&P 500	Wilshire 5000	NASDAQ Composite	Lehman Bros. Corp. Bonds	EAFE	Gold	r	Mean	Std. Dev.
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0014	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0028	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0055	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0110	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	1	0	0.0221	1.1412	0.2354
0	0	0	0	0	0	0.9992	0.0008	0.0442	1.1412	0.2352
0	0	0	0	0	0	0.7949	0.2051	0.0884	1.1387	0.1892
0	0	0	0.2272	0	0	0.5270	0.2459	0.1768	1.1342	0.1573
0	0	0.0027	0.2124	0	0.3663	0.2285	0.1901	0.3536	1.1170	0.0989
0.6848	0	0	0.0178	0	0.1806	0.0710	0.0458	0.7071	1.0882	0.0332
0.7886	0	0	0	0.0006	0.1331	0.0511	0.0265	1.4142	1.0845	0.0292
0.8307	0	0	0	0	0.1093	0.0411	0.0190	2.8284	1.0832	0.0285
0.8506	0	0	0	0	0.0979	0.0362	0.0154	5.6569	1.0825	0.0283
0.8608	0	0	0	0	0.0919	0.0337	0.0136	11.3137	1.0822	0.0283
0.8658	0	0	0	0	0.0891	0.0325	0.0127	22.6274	1.0820	0.0283
0.8683	0	0	0	0	0.0876	0.0319	0.0122	45.2548	1.0820	0.0283

نگاره ۵. نتایج توزیع سرمایه با مدل l_c

ضمیمه ۳

تابع توزیع احتمال داده‌های سهام مساله واندربی از نرم افزار ARENA برآورد شده است و توسط تابع توزیع برآورد شده، ۱۰۰۰۰ مقدار تصادفی برای متوسط نرخ بازگشت هر سهم شبیه سازی شده است. هم‌چنین مقدار تابع مطلوبیت برای سرمایه‌گذاری‌های نرم‌های متفاوت محاسبه شده است.

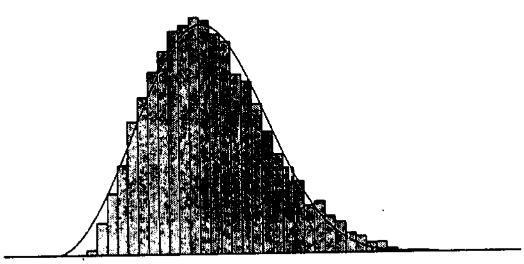


Distribution: Weibull
Expression: 0.67 + WEIB (0.532, 2.15)
Square Error: 0.008641

Kolmogorov-Smirnov Test
Test Statistic= 0.0881

نگاره ۶ ارزش انتظاری تابع مطلوبیت برای سرمایه‌گذاری l_1

K	r=0.1	r=0.3	r=0.5	r=1	r=2
0.1	0.1078	0.1071	0.1022	0.1022	0.1022
0.2	0.2035	0.2025	0.1940	0.1940	0.1940
0.5	0.4316	0.4310	0.4167	0.4167	0.4167
1	0.6726	0.6741	0.6596	0.6597	0.6597
2	0.8870	0.8910	0.8841	0.8841	0.8841
3	0.9589	0.9626	0.9605	0.6505	0.9605
4	0.9842	0.9868	0.9865	0.9865	0.9865
5	0.9936	0.9952	0.9954	0.9954	0.9954



Distribution: Weibull
Expression: 0.52 +WEIB (0.81, 3.24)
Square Error: 0.000246

Kolmogorov-Smirnov Test
Test Statistic= 0.0346

نگاره۷. ارزش انتظاری تابع مطلوبیت برای سرمایه‌گذاری l_2

K	r =0.1	r =0.3	r =0.5	r =1	r =2
0.1	0.1077	0.1066	0.1028	0.1024	0.1024
0.2	0.2035	0.2018	0.1950	0.1943	0.1944
0.5	0.4324	0.4303	0.4158	0.4174	0.4174
1	0.6751	0.6745	0.6617	0.6605	0.6605
2	0.8907	0.8928	0.8734	0.8846	0.8847
3	0.9620	0.9643	0.9611	0.9607	0.9608
4	0.9863	0.9880	0.9868	0.9866	0.9867
5	0.9949	0.9959	0.9955	0.9954	0.9955

نگاره ۸. ارزش انتظاری تابع مطلوبیت برای سرمایه‌گذاری l_∞

K	r=0.1	r=0.3	r=0.5	r=1	r=2
0.1	0.1068	0.1061	0.1061	0.1052	0.1033
0.2	0.2021	0.2009	0.2009	0.1992	0.1960
0.5	0.4307	0.4288	0.4288	0.4260	0.4203
1	0.6747	0.6731	0.6731	0.6703	0.6638
2	0.8939	0.8923	0.8923	0.8909	0.8868
3	0.9641	0.9642	0.9642	0.9638	0.9619
4	0.9878	0.9880	0.9880	0.9879	0.9871
5	09958	0.9960	0.9960	0.9960	0.9959